Tarea 7

Fecha de entrega: Abril 27 de 2017

1. Muestre que el método de Euler modificado es convergente.

2. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_1' = 9x_1 + 24x_2 + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

$$x_2' = -24x_1 - 51x_2 - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

con valores iniciales $x_1(0) = 4/3$ 4 $x_2(0) = 2/3$. Este sistema tiene solución $x_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t$ y $x_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t$.

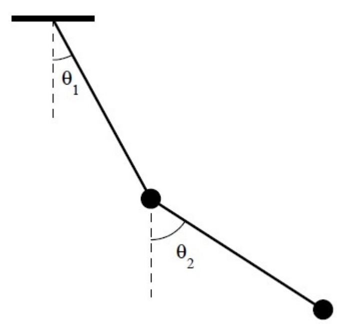
   a) Implemente el método RK4 para resolver el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 20$. Tome $h = 1/10, 1/14, 2^{-k}/15$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Calcule $x_2(20)$ en cada caso. Grafique los errores variando h en una gráfic logarítmica.

   b) Implemente el método de Adams-Bashford de orden 3 y repita el ejercicio anterior.

   c) Implemente el método de Euler implícito y repita el ejercicio anterior.

   Estos resultados están acorde con el orden de los métodos?

3. Considere un doble péndulo como el de la figura. El estado del péndulo en el tiempo t está dado por los ángulos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.



Asuma que las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo son las siguientes:

$$\theta_1'' = \frac{-3\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)((\theta_2')^2 + (\theta_1')^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

$$\theta_2'' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(2(\theta_1')^2 + 2\cos\theta_1 + (\theta_2')^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

   a) Escriba un sistema de ecuaciones de primer orden que describa el movimiento del péndulo en términos de θ_1, θ_2, $\theta_1' = \omega_1$ y $\theta_2' = \omega_2$.

b) Implemente el método de RK4 para resolvel el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 100$ con $h = 0{,}05$, considerando las condiciones iniciales dadas en la tabla. En cada caso grafique $\theta_2(t)$ contra t. Incluya las gráficas de los casos 3 y 4 en la misma gráfica. (En total son **tres** gráficas.)

	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$	$\omega_1(0)$	$\omega_2(0)$
1	1	1	0	0
2	π	0	0	10^{-10}
3	2	2	0	0
4	2	$2+10^{-3}$	0	0

c) Considere solo el primer caso de la tabla de arriba. Tome $h = 0{,}05/2^k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, y $h = 0{,}001$. Calcule $\theta_2(100)$ en cada caso. Considere el resultado con $h = 1/1000$ como la solución exacta y grafique los errores variando h en una gráfica logarítmica. Este resultado está acorde con el orden del método?

4. Considere una barra anclada en los extremos con una carga uniforme.

a) El problema de frontera lineal que modela esta situación es

$$w'' = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x-l), 0 < x < l,$$

con $w(0) = w(l) = 0$. Use una longitud $l = 120$, el módulo de elasticidad $E = 3 \times 10^7$, la carga en los extremos $S = 1000$ y el momento de incercia central $I = 625$. Use el método de diferencias finitas con 100 intervalos y grafique en una sola gráfica la deformación de la barra para valores de carga $q = 10^k$, con $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Especifique con qué método resuelve el sistema lineal.

b) Usando un representación más apropiada del problema, se puede modelar usando la ecuación no lineal

$$[1 + (w_n')^2]^{-3/2} w_n'' = \frac{S}{EI}w_n + \frac{qx}{2EI}(x-l), 0 < x < l,$$

con $w_n(0) = w_n(l) = 0$. Use el método del disparo con 100 intervalos y grafique en una sola gráfica la deformación de la barra para valores de carga $q = 10^k$, con $k = 1, 2, 3, 4, 5$ con:

1) El método de la secante con valores iniciales para $w'(0)$ de 0 y 1 hasta tener un error de 10^{-6}. Especifique con qué método resuelve las EDO con valor inicial.
2) El método de Newton con valor inicial para $w'(0) = 0$ hasta tener un error de 10^{-6}. Especifique con qué método resuelve las EDO con valor inicial.

Para cada valor de carga compare el número de iteraciones en cada método.

c) Grafique $|w(60) - w_n(60)|$ variando los valores de q en una gráfica logarítmica.