Tarea 5

Fecha de entrega: Marzo 30 de 2017

1. Sea $A \in M^{n\times n}$ tridiagonal con entradas en la diagonal no nulas, $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ y $|a_{ii}| \geq |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}|$ para $i = 2, \ldots, n-1$. Muestre que A es invertible. Ayuda: Piense en la factorización LU de A.

2. *a*) Sea $A \in M^{n\times n}$ simétrica definida positiva. Muestre que n vectores no nulos A-conjugados son una base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea $A \in M^{n\times n}$ arbitraria y sea $\{u^1, \ldots, u^n\}$ un sistema A-ortonormal, es decir

   $$(u^i)^T A u^j = \delta_{ij}.$$

   Muestre que A debe ser simétrica definida positiva. Ayuda: $U^T A U = I$ con cierta matriz U.

3. Dado n, genere una matriz de $n \times n$ con entradas distribuidas uniforme (-1,1). Convierta la matriz a una con diagonal estríctamente dominante reemplazando la diagonal por la suma de los valores absolutos de los elementos de fila. Llame a esta matriz A. Resuelva el sistema $Ax = b$ con b el vector de unos para $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ usando los siguientes métodos y haga una gráfica loglog del número de iteraciones contra el tamaño de la matriz A:

   a) LU: Calcule la factorización LU de la matriz y luego resuelva los dos sistemas triangulares.

   b) Jacobi: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   c) Gauss-Seidel: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   d) SOR con $w = 0{,}25, 0{,}5$ y $0{,}75$: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

4. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera:

   $$\begin{cases} y'' = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

   Este problema se puede resolver numéricamente resolviendo el problema

   $$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), & i = 1, 2, \ldots, n \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

   con $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$ y $h = \frac{1}{n+1}$.

   a) Escriba (1) de la forma $Ay = b$.

   b) Encuentre los valores propios de A y muestre que $\kappa(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Ayuda: $A = 2(I + B)$ tal que el polinomio característico de B es el polinomio de Chebyshev.

c) Tomando $f(x) = x^2$, y $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ resuelva el sistema usando los siguientes métodos y haga una gráfica loglog del número de iteraciones contra el tamaño de la matriz A:

1) Directo: Use el algoritmo descrito en el libro de Kincaid, al final de la sección 4.3, para sistemas tridiagonales.
2) Jacobi: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.
3) Gauss-Seidel: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.
4) SOR con w óptimo: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$. Calcule exactamente el radio espectral de la matriz J del método de Jacobi.

d) Escoja el "mejor" método de los anteriores, justificando su escogencia, y resuleva el sistema tomando $f(x) = x^2 + 0{,}05$. Compare el error relativo de la nueva solución con la cota obtenida en clase.

Mauricio Junca