Tarea 3

Fecha de entrega: Marzo 2 de 2017

1. Encuentre una fórmula de cuadratura de la forma $Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$, que sea de grado 2, para aproximar
$$\int_1^3 f(x)dx.$$
Transforme la fórmula para aproximar la integral sobre $[a, b]$.

2. Muestre que ninguna fórmula de cuadratura (no necesariamente gaussiana) $\sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)$ puede tener grado mayor que $2n - 1$ sin importar los valores c_i's y x_i's.

3. Muestre que los polinomios de Chebyshev forman un sistema ortogonal en [-1,1] con la función de peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Considere el problema de optimización $\min_{p \in \mathcal{P}_n} \|p\|$, para alguna norma $\| \cdot \|$ y donde $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de polinomios mónicos de grado n.

   a) Si $\|p\| = \max_{x \in [-1,1]} |p(x)|$, ¿quién resuelve el problema de optimización?

   b) Dada $w > 0$ en $[a, b]$, sea $\|p\| = \int_a^b (p(x))^2 w(x)dx$. Encuentre el polinomio que minimiza esta norma. Ayuda: Escriba $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, derive con respecto a a_i e iguale a 0.

5. En cada uno de los casos siguientes, tabule el error en la integración numérica usando la regla del trapecio compuesta, la regla de Simpson compuesta, cuadratura gaussiana con polinomios de Legendre y cuadratura gaussiana con polinomios de Chebyshev, para $n = 5, 10, 20, 30$.

   a) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} e^{-x} \cos(2x)dx.$

   b) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$

   c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Mauricio Junca