Tarea 2

Fecha de entrega: Febrero 16 de 2017

1. Sea $p > 1$. Usando el método de punto fijo, encuentre el valor de

$$x = \frac{1}{p + \frac{1}{p+\frac{1}{p+\dots}}}.$$

2. Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolante de Lagrange de $f(x)$ en los puntos distintos x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. Si x es un punto diferente a los anteriores, muestre que

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

   Concluya que si $f \in C^n([a, b])$ y $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, 1, \dots, n$, entonces existe $\zeta \in [a, b]$ tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

3. Use el ejercicio anterior para mostrar que el error en el método de la secante para resolver ecuaciones no lineales satisface

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\zeta_n)}{f'(\xi_n)} \right) e_n e_{n-1},$$

   donde ζ_n y ξ_n están en el intervalo más pequeño que contiene a r, x_n, x_{n-1}, con $f(r) = 0$.

4. Considere la función de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

   En cada uno de los casos siguientes, en la misma gráfica grafique f y $P_n(x)$, con $n = 5, 10$. Implemente los algoritmos de Horner y diferencias divididas para hallar y evaluar $P_n(x)$.

   a) Puntos igualmente espaciados en $[-1, 1]$.
   b) Puntos igualmente espaciados en $[-5, 5]$.
   c) Puntos en las raices del polinomio de Chebyshev ajustadas al intervalo $[-5, 5]$.

Mauricio Junca