Tarea 1

Fecha de entrega: Febrero 7 de 2017

1. Escriba una fórmula que involucre a, b y ε para calcular el número de iteraciones necesarias para garantizar que el método de la bisección tenga un error menor a ε.

2. Sea $f \in C^{m+1}([a,b])$ y r una raíz de multiplicidad $m > 1$, es decir que $f^{(k)}(r) = 0$ para $k \leq m-1$ y $f^{(m)}(r) \neq 0$. Muestre que en este caso el método de Newton tiene órden de convergencia lineal y además
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{m-1}{m}.$$

3. ¿Qué condiciones debe satisfacer f para que el método de Newton tenga un order de convergencia cúbico?

4. Considere las funciones
   - $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$ en [0,1].
   - $g(x) = x - \tan x$ alrededor de $\frac{9}{2}$.
   - $h(x) = \sin x + x^2 \cos x - x^2 - x$ alrededor de 0.

   Implemente los métodos de la bisección, Newton y secante para calcular la raiz de la función. Defina claramente el criterio de parada de cada método. En cada caso calcule $\dfrac{\log|e_{n+1}|}{\log|e_n|}$ y estime el orden de convergencia. Compare con el teórico.

5. Bajo las condiciones del problema 2, considere la siguiente modificación del método de Newton:
$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
   Use la función h del problema 4 para comprobar que esta modificación tiene de nuevo orden de convergencia cuadrático.

6. Considere el método de Steffensen dado por
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}.$$
   Compruebe su orden de convergencia cuádratico con las funciones f y g del problema 4. ¿Qué puede decir de la convergencia para la función h? Note que este método no requiere el cálculo de derivada, ¿cómo puede explicar que tenga mejor orden de convergencia que el método de la secante?

Mauricio Junca