Proyecto Final

Fecha de entrega: Mayo .. de 2017

Fecha de sustentación: Mayo .. de 2017

1. Considere el problema de frontera dado por la ecuación

$$-\frac{d}{dx}(e^{-x}y') + e^{-x}y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)},$$

en el intervalo $[0,1]$.

a) Con condiciones de Dirichlet homogéneas, la solución del problema es $y(x) = x(e^x - e)$. Resuelva el problema usando el método de elementos finitos tomando $h = 0{,}2, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01$ usando la base lineal a trozos y la base *B-spline*. Grafique el error máximo obtenido con cada base en la misma gráfica usando una escala logarítmica. Especifique cómo resuelve el sistema lineal.

b) Considere ahora condiciones de frontera de Neumann $y(0) = 0$, $y'(1) = e$. Resulva el problema y repita las gráficas del punto anterior.

2. La ecuación de Black-Scholes es muy conocida en matemáticas financieras pues permite valorar opciones de tipo europeo (bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes). Supongamos que vamos a valorar una opción que paga, en el tiempo de maduración T, $g(s)$ cuando la acción vale s. Si denotamos $V(s,t)$ el valor de esta opción en el tiempo t cuando la acción vale s, entonces la función V debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 s^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\dfrac{\partial V}{\partial s} - rV = 0, & 0 < s, 0 \leq t \leq T \\ V(s,T) = g(s), & 0 < s, \end{cases}$$

donde σ y r son parámetros del modelo. Notemos que en este caso el conjunto donde está definida la ecuación no es ni cerrado ni acotado. Para poder resolver esta ecuación numéricamente debemos imponer condiciones sobre un dominio acotado que mejor aproximen a V. Estas condiciones van a depender de la función de pago g. En este caso vamos a valorar una opción *call* con precio de ejercicio K, es decir, la función de pago es

$$g(s) = \text{máx}\{s - K, 0\}.$$

Vamos a resolver la ecuación para valores de $s \in [0, s_m]$, con $s_m > K$. Por razones financieras las condiciones de frontera son

$$\begin{cases} V(0,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ V(s_m,t) = s_m - e^{-r(T-t)}K, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Usando $\sigma = 0{,}15$, $r = 0{,}05$, $T = 0{,}5$, $K = 50$ y $s_m = 100$. Aproxime la fución V usando diferencias finitas. Haga una gráfica de $V(s,0)$. Debe especificar el método usado y los valores de h y k usados. Comente sobre la estabilidad del método. Especifique cómo resuelve el sistema lineal.

3. *a*) Use el método de elementos finitos triangulares lineales para aproximar la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) = \Omega \\ u = h, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$h(x,y) = \begin{cases} x, & [0,1] \times \{0\} \\ y, & \{0\} \times [0,1] \\ 1-x, & [0,1] \times \{1\} \\ 1-y, & \{1\} \times [0,1] \end{cases}$$

Para esto use la discretización vista en clase. Haga la gráfica de la solución tomando $h = 0{,}01$ (es decir, una cuadrícula de 100 x 100). Especifique cómo resuelve el sistema lineal

b) Ahora vamos a resuelver el problema

$$\begin{cases} \text{mín}\{-\Delta u, u - g\} = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u = \text{máx}\{h, g\}, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $g(x,y) = -4\sqrt{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2} + 2$. Haga la gráfica de la solución cuando $h = 0{,}01$. Haga lo mismo con $g(x,y) = -4\sqrt{(x-0{,}7)^2 + (y-0{,}7)^2} + 2$

Mauricio Junca