

MATE2410 Geometría Diferencial 1
Solución Examen Final — (25/11/2004) ¹

Prof. José Ricardo ARTEAGA

Prob.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	Total
Valor	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	50
Puntos											

Nombre:

Código:

Primera parte

Conteste Falso (F) o Verdadero (V) según el caso. Justifique matemáticamente.

1. Con una cuerda en el plano de longitud igual a 1 metro se puede encerrar, con una curva de Jordan en el plano, una región de área igual a $\frac{1}{2}$ metro cuadrado.
2. Se puede encontrar una superficie regular compacta orientable encajada (embedded) en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante negativa igual a $-\frac{1}{3}$.
3. La holonomía sobre cualquier curva cerrada sobre la esfera S^2 es igual a cero.
4. Si una superficie tiene métrica g_{ij} (primera forma fundamental I)

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^u \end{pmatrix}$$

entonces tiene curvatura de Gauss constante igual a cero.

5. La curvatura total del toro $\int_M K$ es igual a cero.

SOLUCIÓN

1. Falso Por la desigualdad isoperimétrica

$$L^2 \geq 4\pi A \implies 1 \geq 4\pi \frac{1}{4} \implies 1 \geq \pi \implies \quad \otimes$$

2. Verdadero Si existe por el Teorema de Alexandrov tenemos que la superficie es además una esfera.

3. Tome el paralelo $v = \pi/4$ donde la holonomía es iguala π

Falso

¹El juramento del uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”

4. Dado que $E = G = e^u$ y $F = 0$, entonces por el Teorema Egregium de Gauss tenemos que:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) = -\frac{1}{2e^u} \left(\left(\frac{e^u}{e^u} \right)_u \right) = 0$$

Verdadero

5. Verdadero Usando el Teorema de Gauss - Bonnet tenemos:

$$\int_M K = 2\pi\chi(M)$$

pero la característica de Euler Poincaré $\chi(M)$ para el toro es igual a cero.

Segunda parte

Muestre todos sus cálculos explícitamente. Si lo desea puede comprobarlos con su intuición o con resultados tratados en el curso.

Para todos los puntos de esta parte considere la superficie $M = S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y la curva en el primer octante α , que es la intersección de M con el plano $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entre los puntos $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es decir en forma paramétrica

$$\begin{cases} M : & X(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \\ \alpha : & \alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ P = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

1. Calcular la triada (base ortonormal para $\mathbb{R}^3$) de los vectores tangente, normal y binormal $\{T, N, B\}$, la curvatura κ y la torsión τ para la curva α .
2. Calcular la curvatura normal de la superficie en el punto P en dirección del vector tangente en P , $k(T)$. T es el vector tangente unitario del punto anterior.
3. Calcular el operador forma S de la superficie M , la curvatura media H y la curvatura de Gauss K para cualquier punto sobre la curva α .
4. Calcular la geodésica γ que une P con Q en el primer octante.
5. Calcular la holonomía al mover el vector T desde P hasta Q sobre α . Calcular la holonomía al mover el vector T desde P hasta Q sobre γ . La curva γ es la geodésica del punto anterior.

Tiempo: 2 horas

Buena Suerte!