Polyeder – eine (T)Raumreise

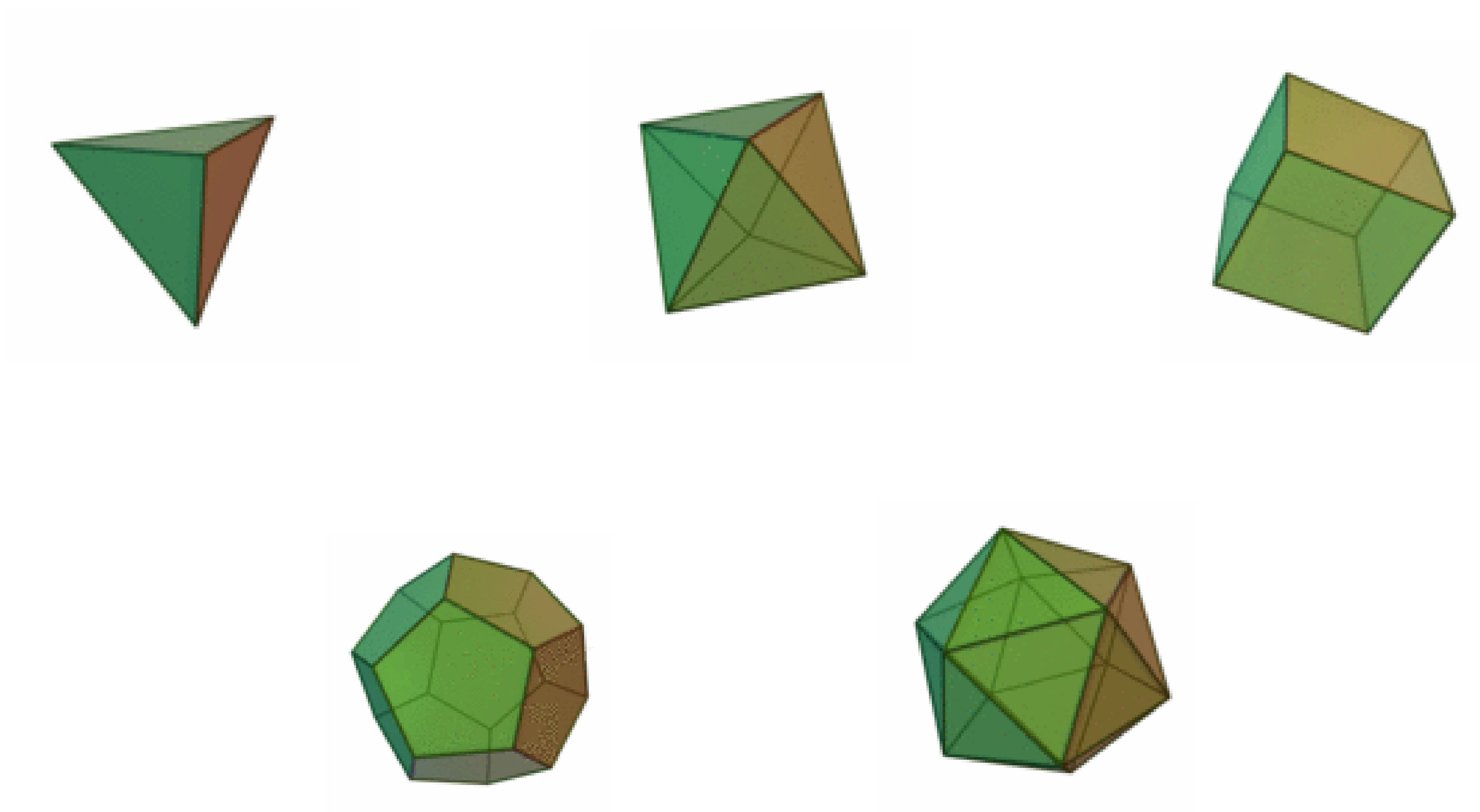
Johannes Rau

Juniorprofessor
Fachbereich Mathematik
Universität Tübingen

Arbeitsgebiet: Tropische Geometrie

www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/

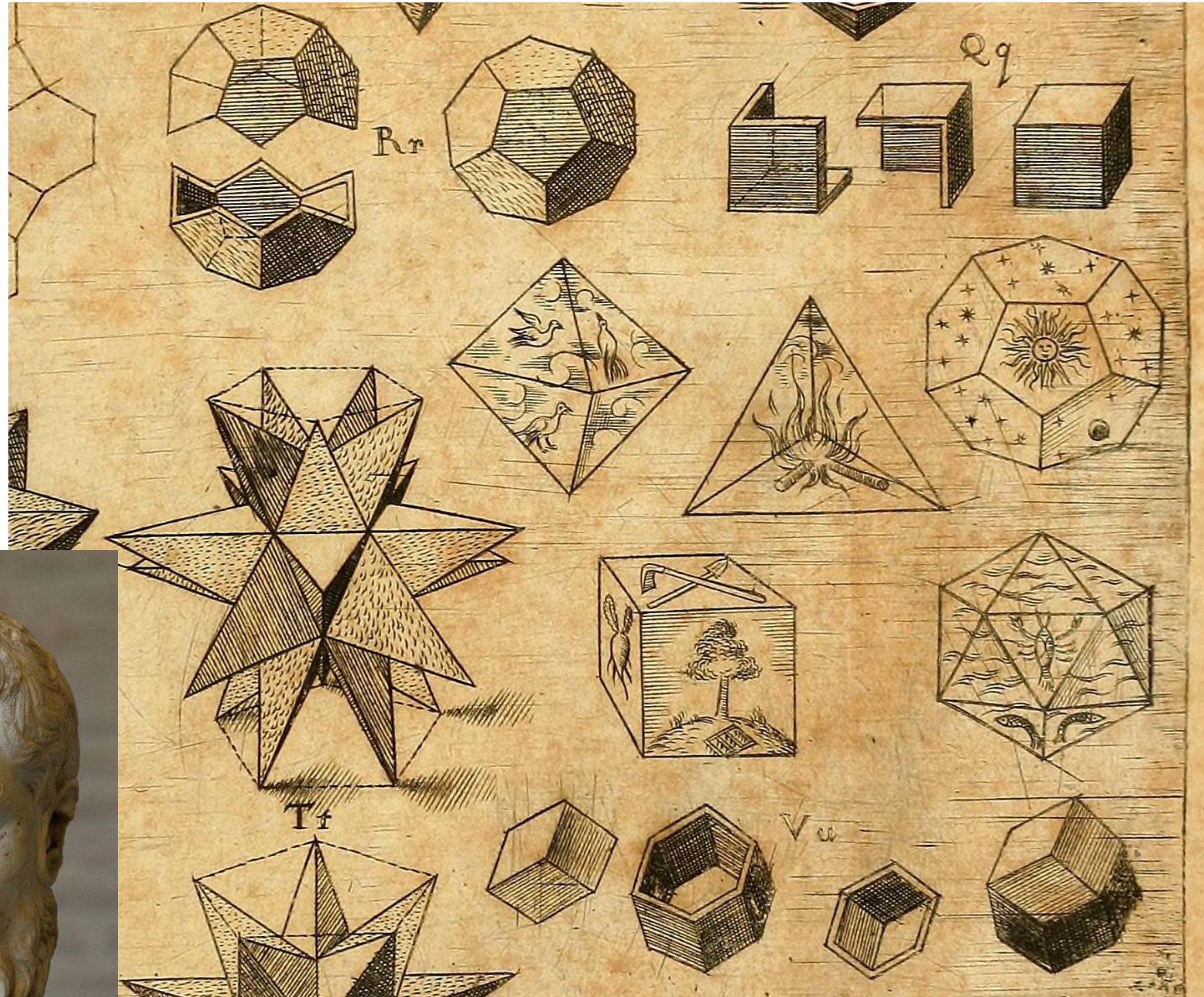
Platonische Körper

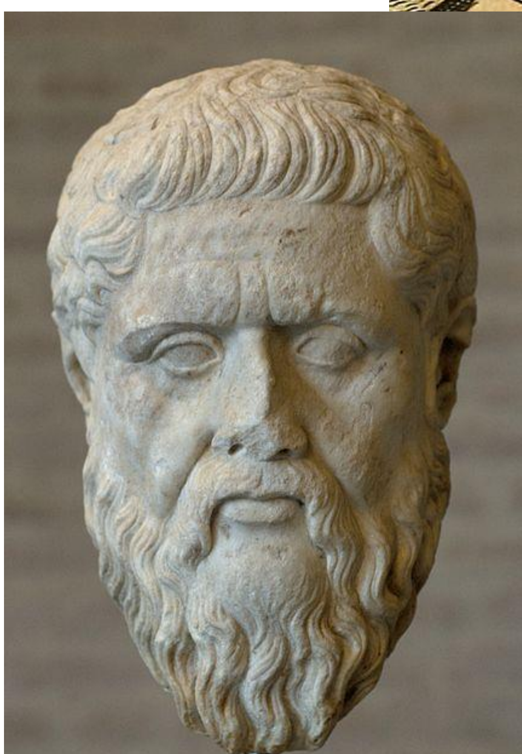


Platonische Körper

Regelmäßige Vielflächer

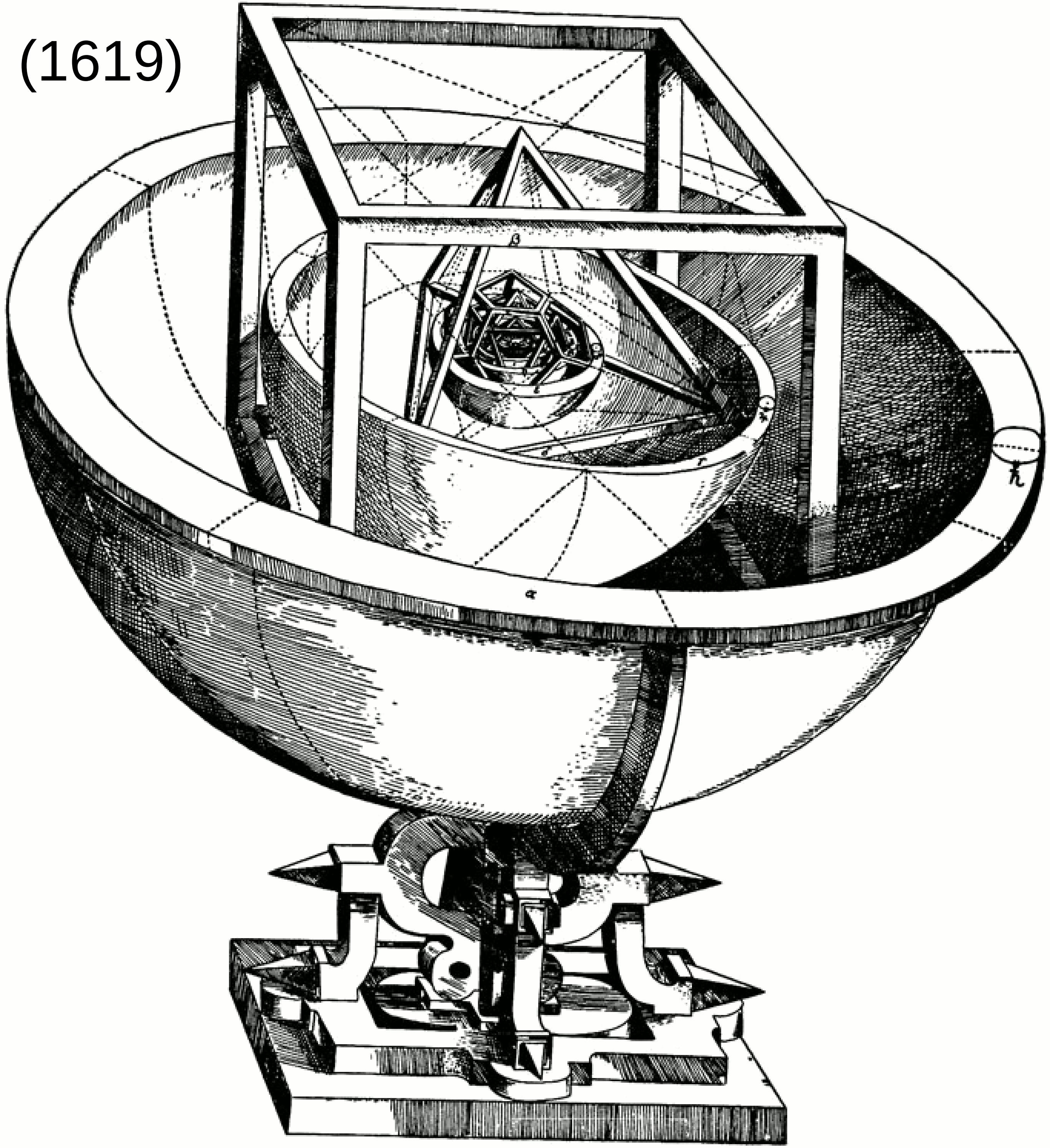
- Seitenflächen sind regelmäßige Vielecke.
- Alle Ecken sind gleich.



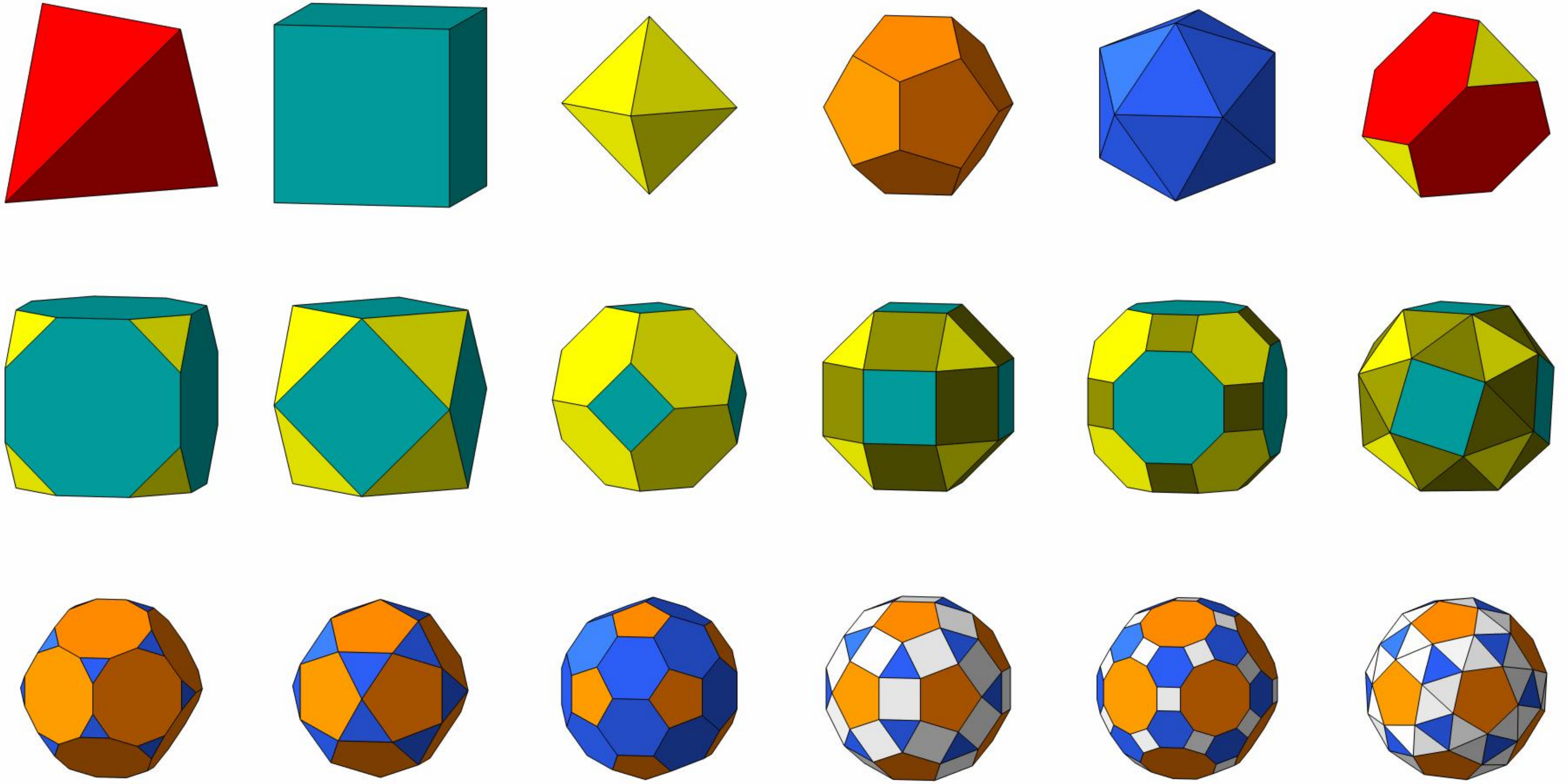


Platon
Timaios (4. Jhd v. Chr.)

Harmonices Mundi (1619)
Johannes Kepler



Polyeder (Vielflächer)



Leonhard Euler
(1707-1783)

Definition

Die Zahl

$$\chi = \# \text{ Flächen} - \# \text{ Kanten} + \# \text{ Ecken}$$

heißt **Euler-Zahl** (des Polyeders).

Mein Polyeder

Name:

Flächen =

Kanten =

Ecken =

Euler-Zahl χ =

Definition

Die Zahl

$$\chi = \#\text{ Flächen} - \#\text{ Kanten} + \#\text{ Ecken}$$

heißt **Euler-Zahl** (des Polyeders).

$\chi = 2$ $\chi = 2$ $\chi = 2$

$\chi = 2$ usw.

$= 4 – 6 + 4$ $= 6 – 12 + 8$ $= 8 – 12 + 6$ $= 12 – 30 + 20$

Eulersche Polyedersatz (Euler, 1758)

Die Euler-Zahl eines konvexen Polyeders ist immer 2.

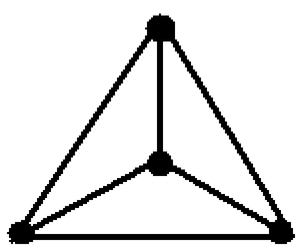
Ein Graph in der Ebene unterteilt die Ebene in verschiedene 'Länder', sogenannte Gebiete.

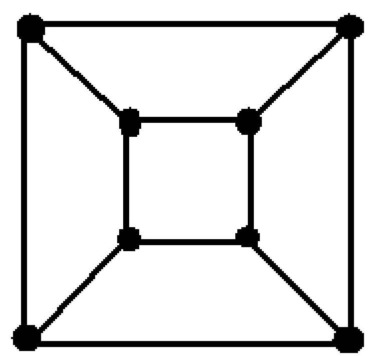
Definition

Die Zahl

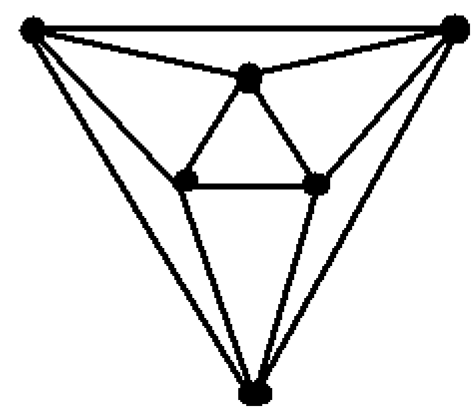
$$\chi = \text{\# Gebiete} - \text{\# Kanten} + \text{\# Ecken}$$

heißt **Euler-Zahl** (des Graphen).





$\chi = 2$



Satz über ebene Graphen

Die Euler-Zahl eines Graphen in der Ebene ist immer 2.

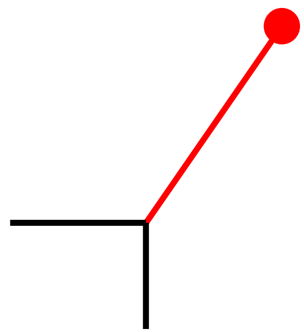
Mathe-Labor

Behauptung 1

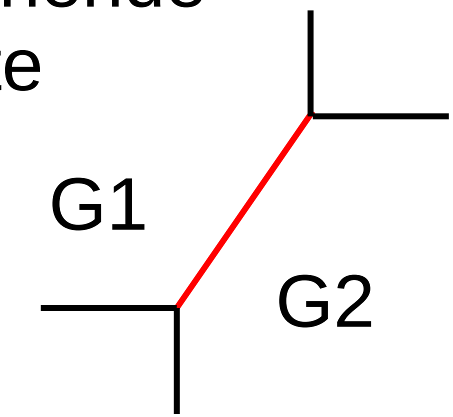
Der Eulersche Polyedersatz folgt aus dem Satz über ebene Graphen.

Mathe-Labor

Ende

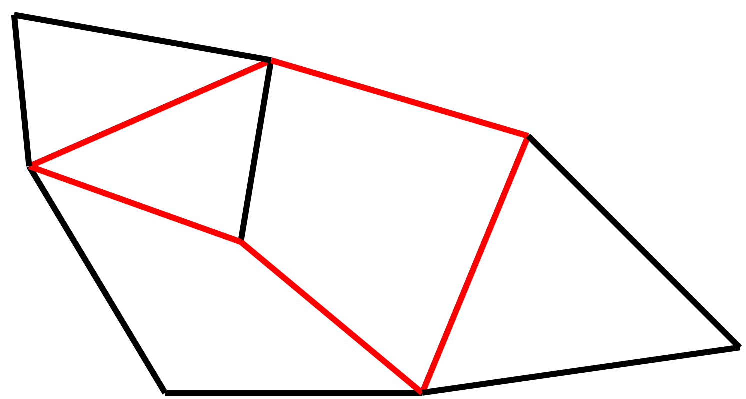


Trennende Kante



$G1 \neq G2$

Kreis



Mathe-Labor

Es sei G ein Graph in der Ebene.

Behauptung 2

Sei K ein *Kreis* in G. Dann ist jede Kante in K eine *trennende Kante*.
Der Graph, der durch Entfernen einer solchen Kante entsteht, ist weiterhin *zusammenhängend* (also alle Ecken sind durch Kanten miteinander verbunden).

Mathe-Labor

Es sei G ein Graph in der Ebene.

Behauptung 3

Angenommen es gibt keinen *Kreis* in G. Dann gibt es eine *Ende* in G.

Mathe-Labor

Behauptung 4

Das Entfernen einer trennenden Kante oder eines Endes (mit der Ecke) ändert die Euler-Zahl des Graphen nicht.

Mathe-Labor

Behauptung 5

Aus den Behauptungen 1 bis 4 folgt der Satz über ebene Graphen.

Mathe-Labor

Behauptung 1

Der Eulersche Polyedersatz folgt aus dem Satz über ebene Graphen.

Behauptung 2

Sei K ein *Kreis* in G. Dann ist jede Kante in K eine *trennende Kante*. Der Graph, der durch Entfernen einer solchen Kante entsteht, ist weiterhin *zusammenhängend*.

Behauptung 3

Angenommen es gibt keinen *Kreis* in G. Dann gibt es eine *Ende* in G.

Behauptung 4

Das Entfernen einer trennenden Kante oder eines Endes (mit der Ecke) ändert die Euler-Zahl des Graphen nicht.

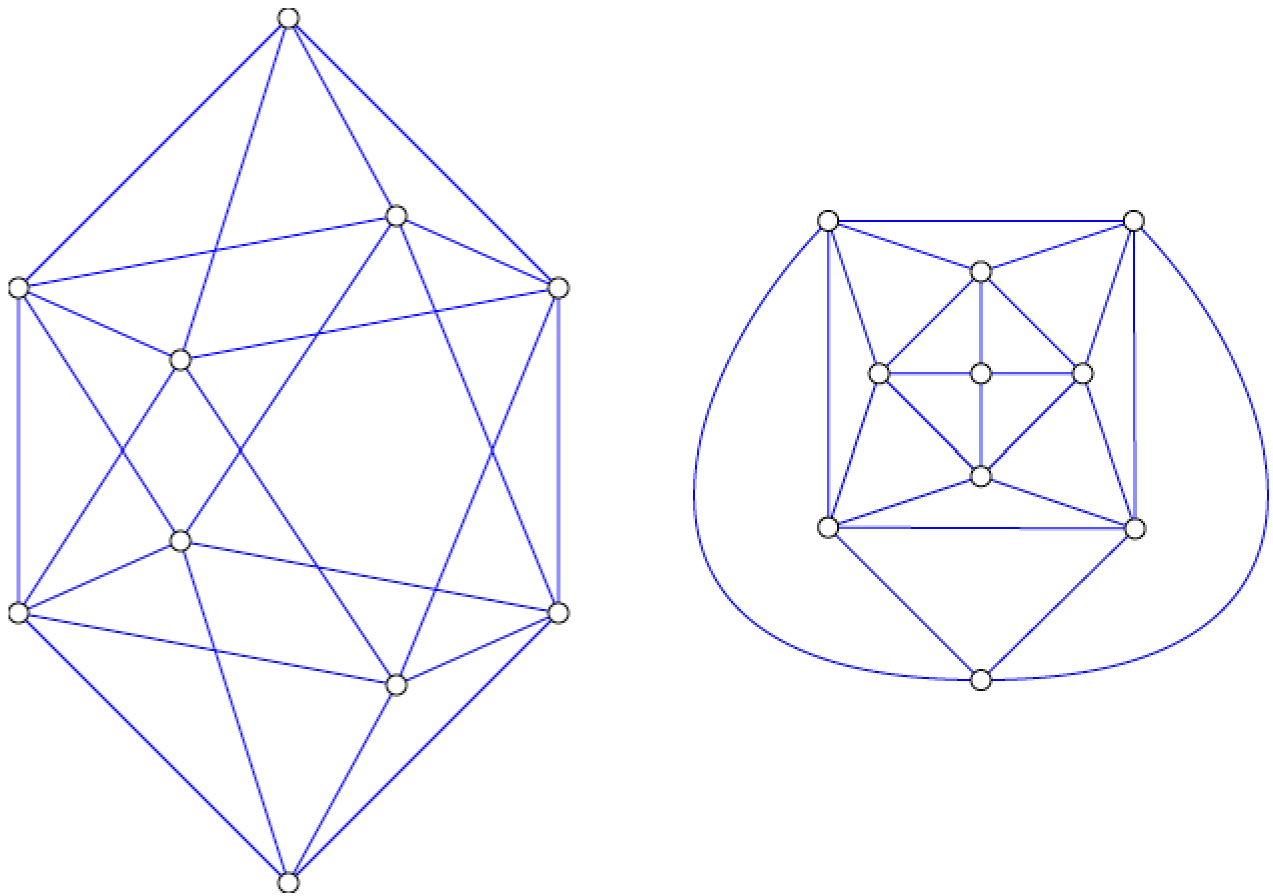
Behauptung 5

Aus den Behauptungen 1 bis 4 folgt der Satz über ebene Graphen.

Beweis:

Umformulierung:
Wähle eine Fläche und entferne einen Punkt.

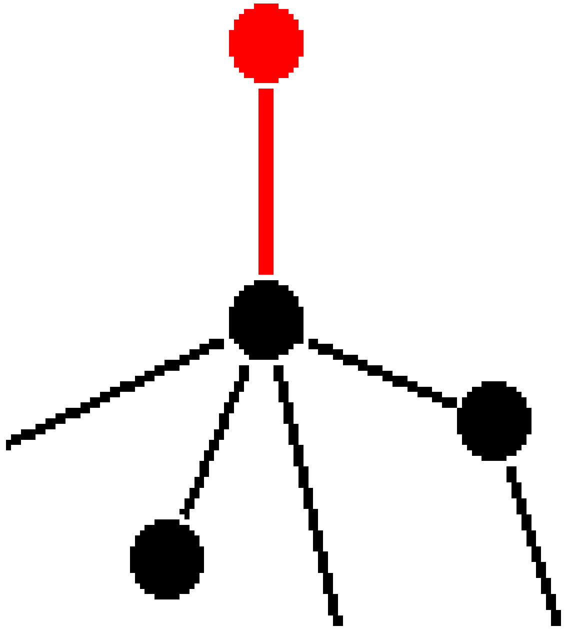
→ Graph in der Ebene



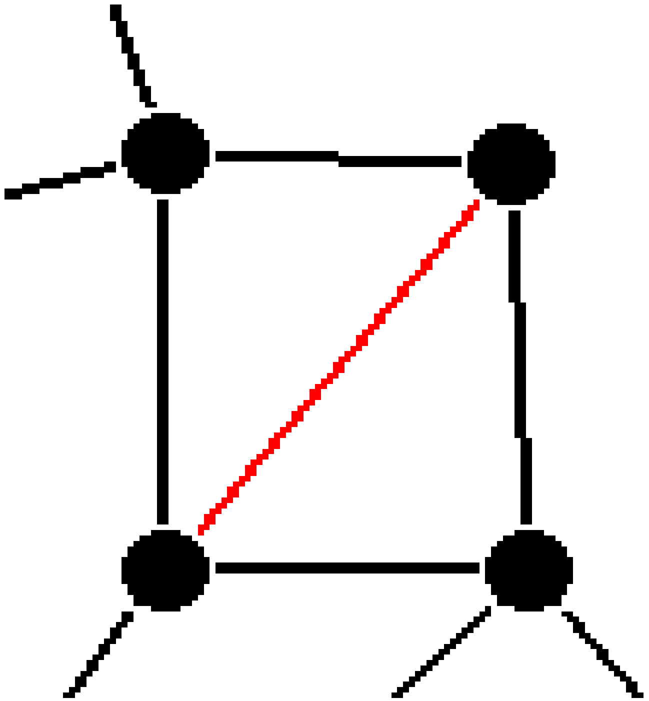
Beweis Satz 2

1. Schritt:

Die folgenden zwei Operationen verändern χ nicht.



- 1 Ecke
- 1 Kante

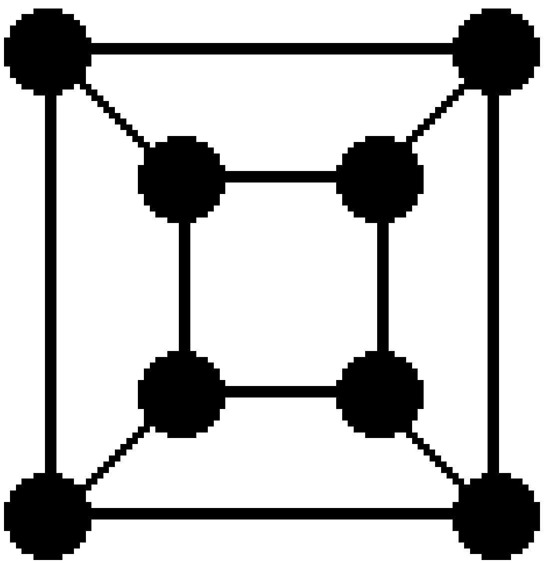


- 1 Gebiet
- 1 Kante

Beweis

2. Schritt:

Jeder Graph G lässt sich durch diese Operationen auf einen Punkt reduzieren.



$\chi = 1 - 0 + 1 = 2$

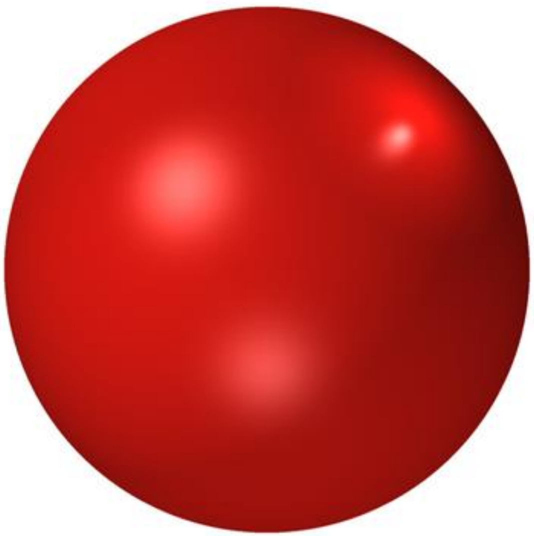
Verallgemeinerung

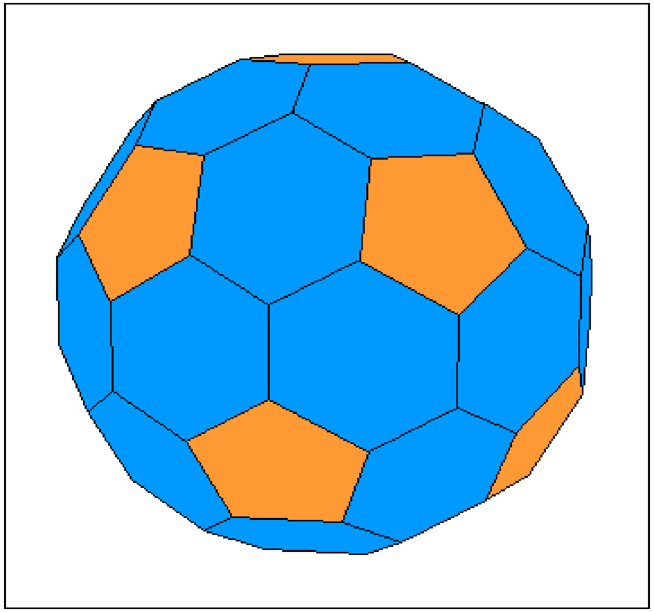
Satz über nicht-zusammenhängende ebene Graphen

Sei G ein ebener Graph mit k Zusammenhangs-komponenten. Dann ist die Euler-Zahl von G gleich 1+k.

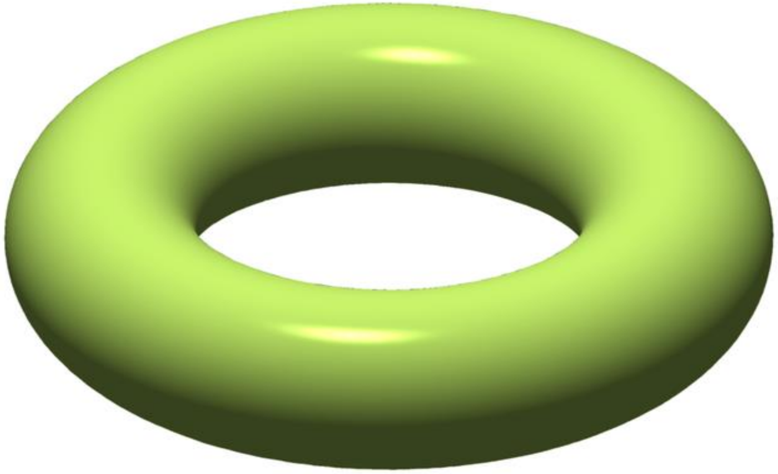
Gebiete - # Kanten + # Ecken = 1 + # Zshgk.

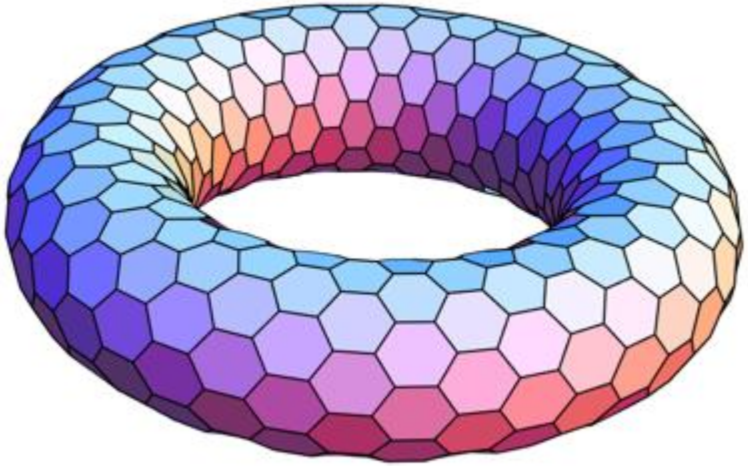
Graphen in der Ebene $\longleftrightarrow$ Zerlegung der Kugeloberfläche



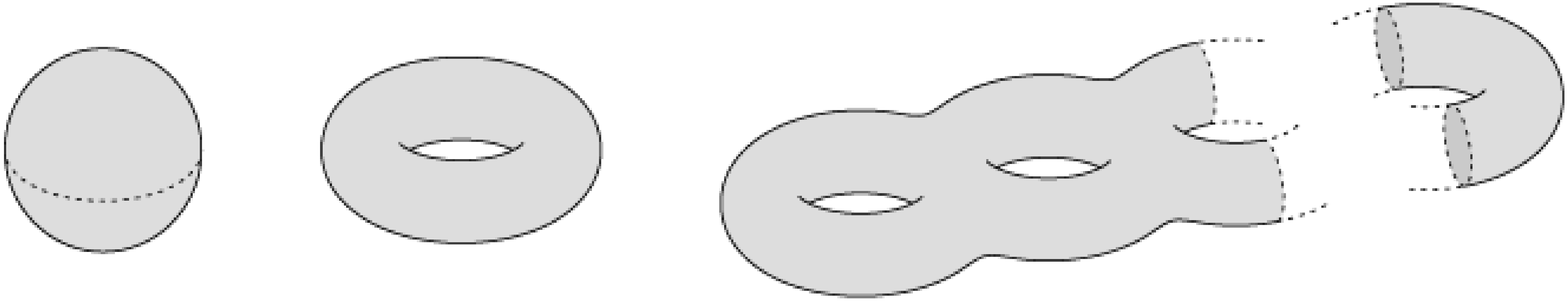


Wie sieht es mit anderen Graphen/Flächen aus?





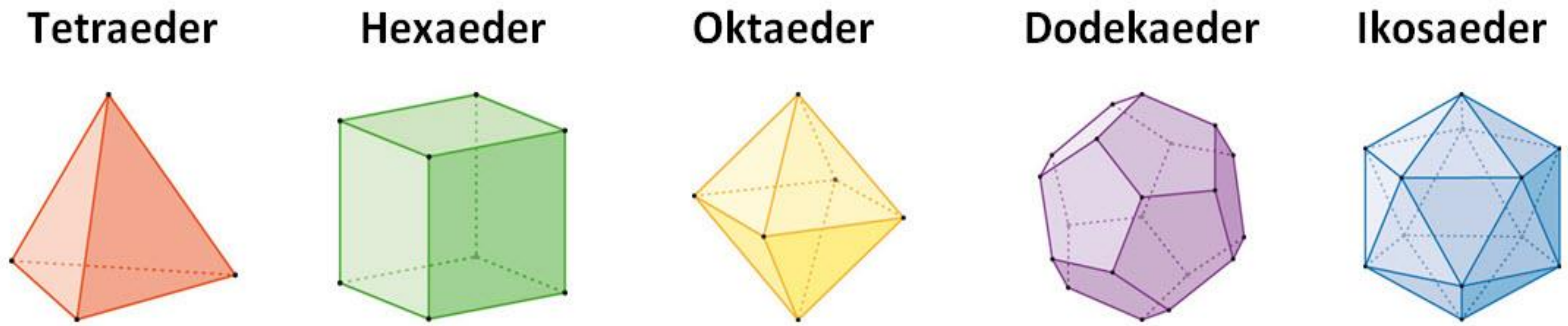
$\chi = 0$



Satz 5 (Lhuillier, 1817)

Für jede Zerlegung einer Fläche mit g Löchern in Polytope gilt:

$$\chi = 2 - 2g$$



Gibt es noch weitere regelmäßige Polyeder?

Gibt es noch weitere regelmäßige Vielflächer?

Satz (Theaitetos, 4. Jhd. v. Chr.)

Nein!
Die fünf platonische Körper sind die einzigen Vielflächer mit den Eigenschaften:

- Seitenflächen sind regelmäßige Vielecke (nur eine Sorte).
- Alle Ecken sind gleich.

Mathe-Labor

Tipp 1

An jeder Ecke stoßen mindestens 3 Flächen zusammen.

Tipp 2

Es sei S die Summe der Innenwinkel der an einer Ecke zusammenstoßenden Flächen. Wie hoch kann S höchstens sein?

Tipp 3

Bestimmen Sie den Innenwinkel eines regelmäßigen m-Ecks.

Tipp 4

Es sei P ein platonischer Körper aus m-Ecken, so dass an jeder Ecke n Flächen zusammenstoßen. Zeigen Sie, dass es nach Tipp 1-3 nur 5 mögliche Paarungen (n,m) gibt.

Zusatz

Ordnen Sie die 5 Paare den 5 platonischen Körpern zu.

Wie lässt sich die Kugeloberfläche
noch charakterisieren?

Wie lässt sich die Kugeloberfläche noch charakterisieren?

Henri Poincaré
(1854-1912)

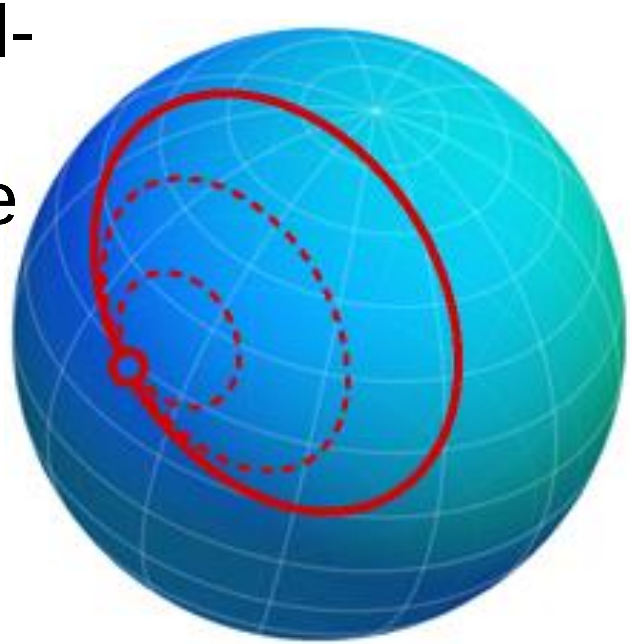
Wie lässt sich die Kugeloberfläche noch charakterisieren?

Henri Poincaré
(1854-1912)

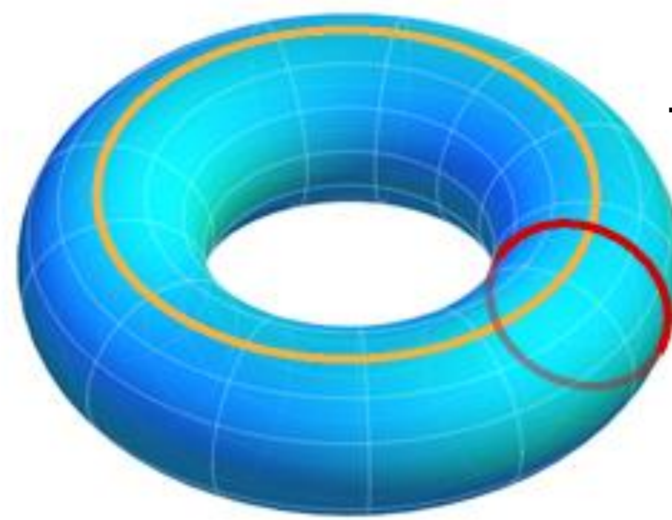
- Studium von Planetenbahnen
- Gibt es periodische Bahnen?

Wie lässt sich die Kugeloberfläche
noch charakterisieren?

Sphäre
Kugel-
ober-
fläche



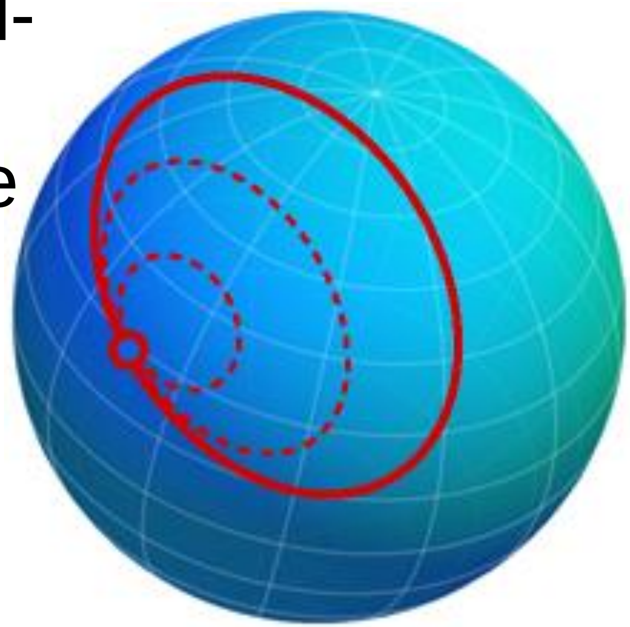
Torus
Donut-
ober-
fläche



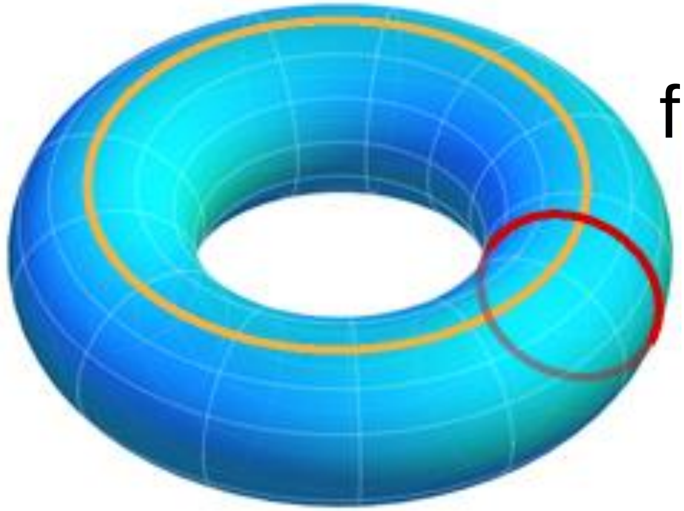
Definition

Eine Fläche heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jedes 'Gummi' zusammenziehen lässt.

Sphäre
Kugel-
ober-
fläche



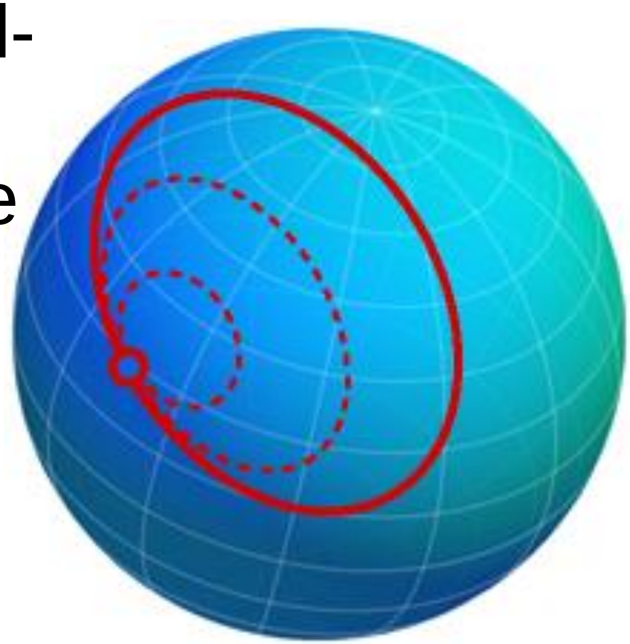
Torus
Donut-
ober-
fläche



Definition

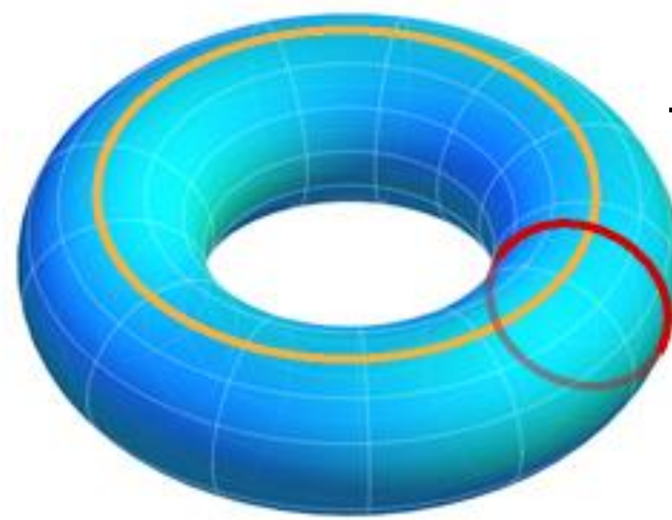
Eine Fläche heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jedes 'Gummi' zusammenziehen lässt.

Sphäre
Kugel-
ober-
fläche



einfach
zshängend.

Torus
Donut-
ober-
fläche



nicht einfach
zshängend.

Satz 6 (Poincaré, 1896)

Jede einfach zusammen-
hängende Fläche lässt sich
zur Sphäre deformieren.

Fläche: 2-dimensional,
ohne Ränder,
ohne offene Enden

Und jetzt: Eine Dimension mehr!

Vermutung (Poincaré, 1904)

Jeder einfach zusammenhängende kompakte Raum lässt sich zur 3-Sphäre deformieren.

Und jetzt: Eine Dimension mehr!

Vermutung (Poincaré, 1904)

Jeder einfach zusammenhängende kompakte Raum lässt sich zur 3-Sphäre deformieren.

Was ist die 3-Sphäre?

Die 3-Sphäre

(Gewöhnliche) 2-Sphäre: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

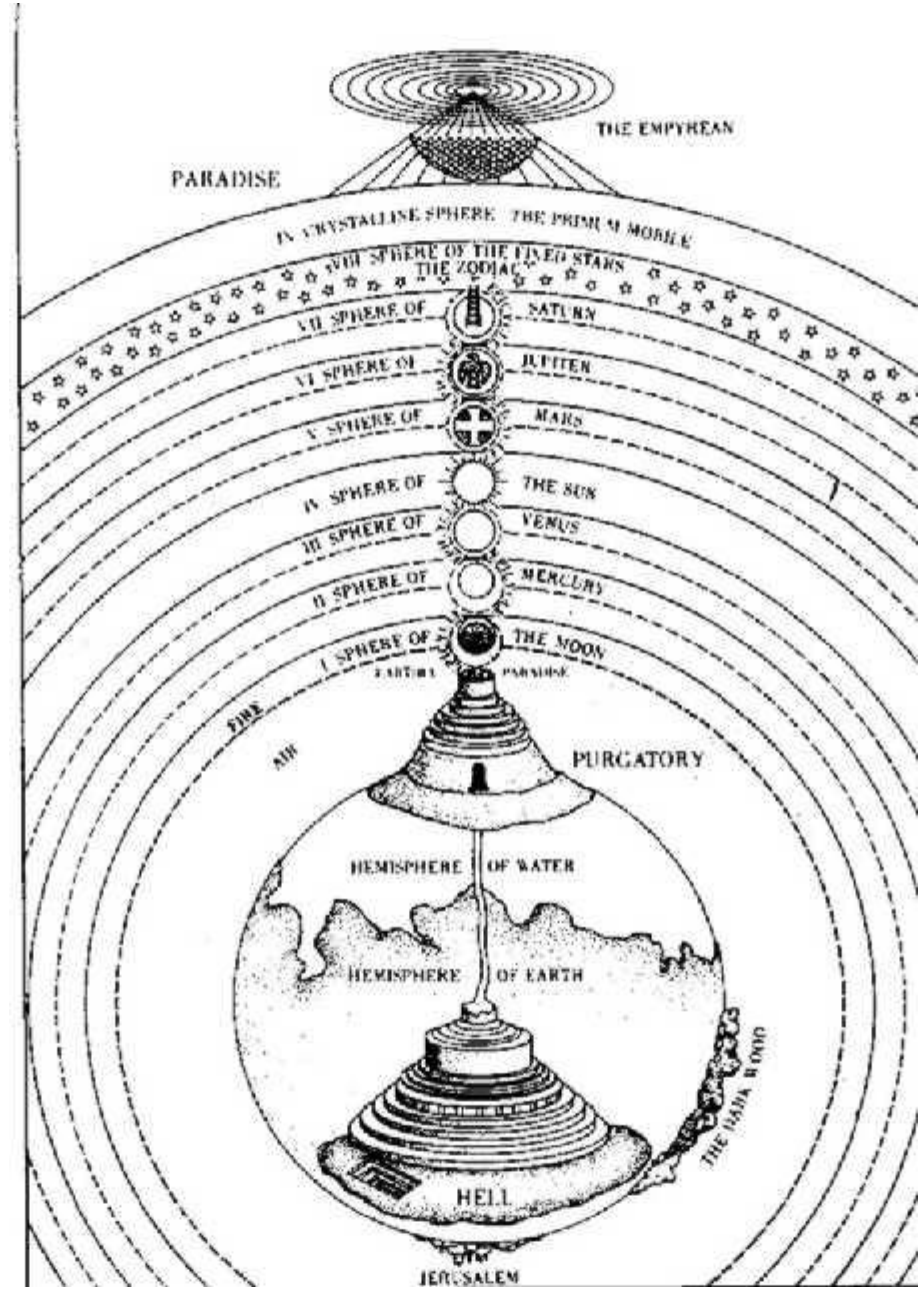
Die 3-Sphäre

(Gewöhnliche) 2-Sphäre: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3-Sphäre: $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Die 3-Sphäre

Dante Alighieri
Divina Commedia (1320)

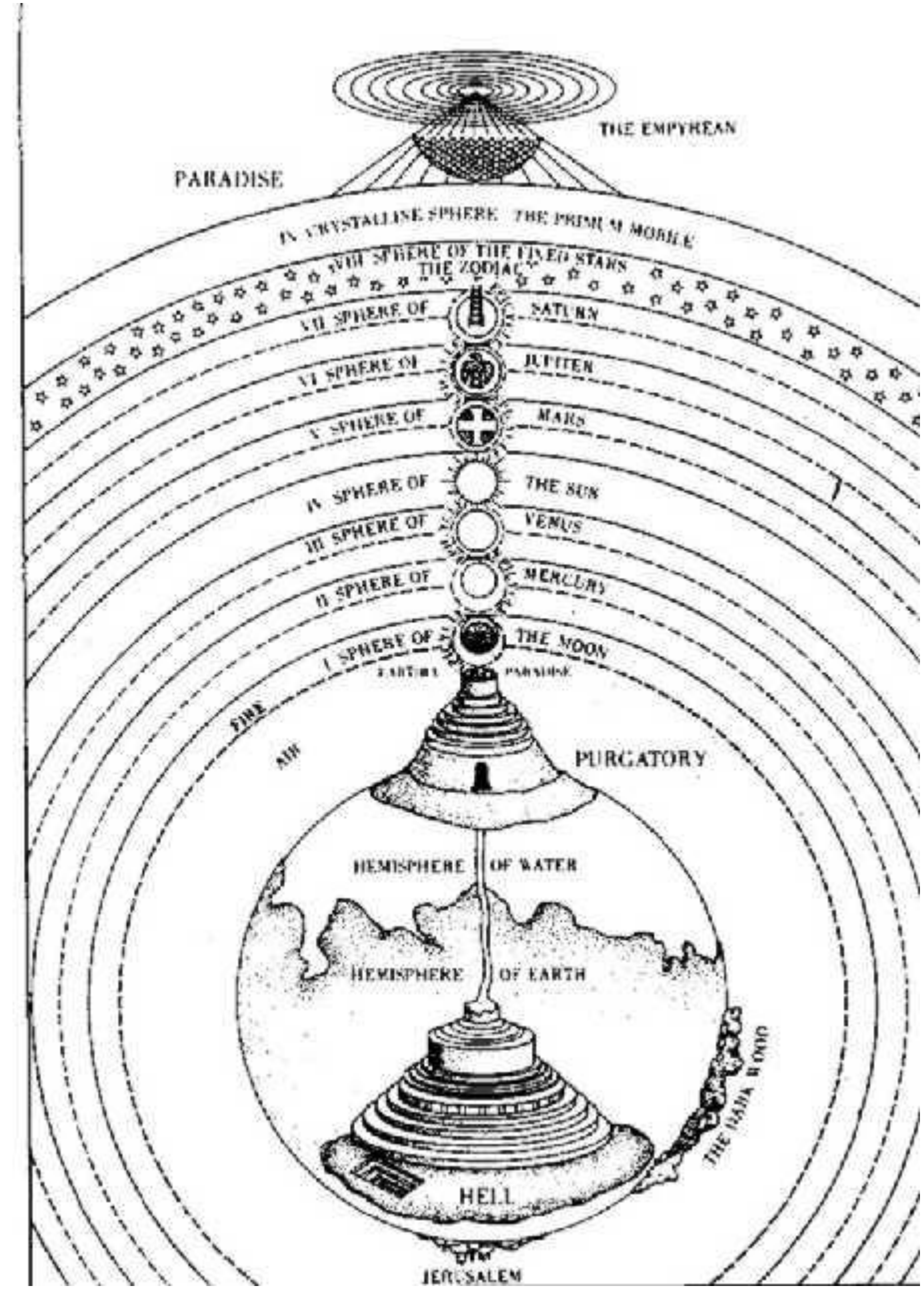


Die 3-Sphäre

Dante Alighieri
Divina Commedia (1320)

Paradies und Hölle sind antipodale Punkte (wie Nord- und Südpol)

⇨ Geometrisch nicht unterscheidbar



Und jetzt: Eine Dimension mehr!

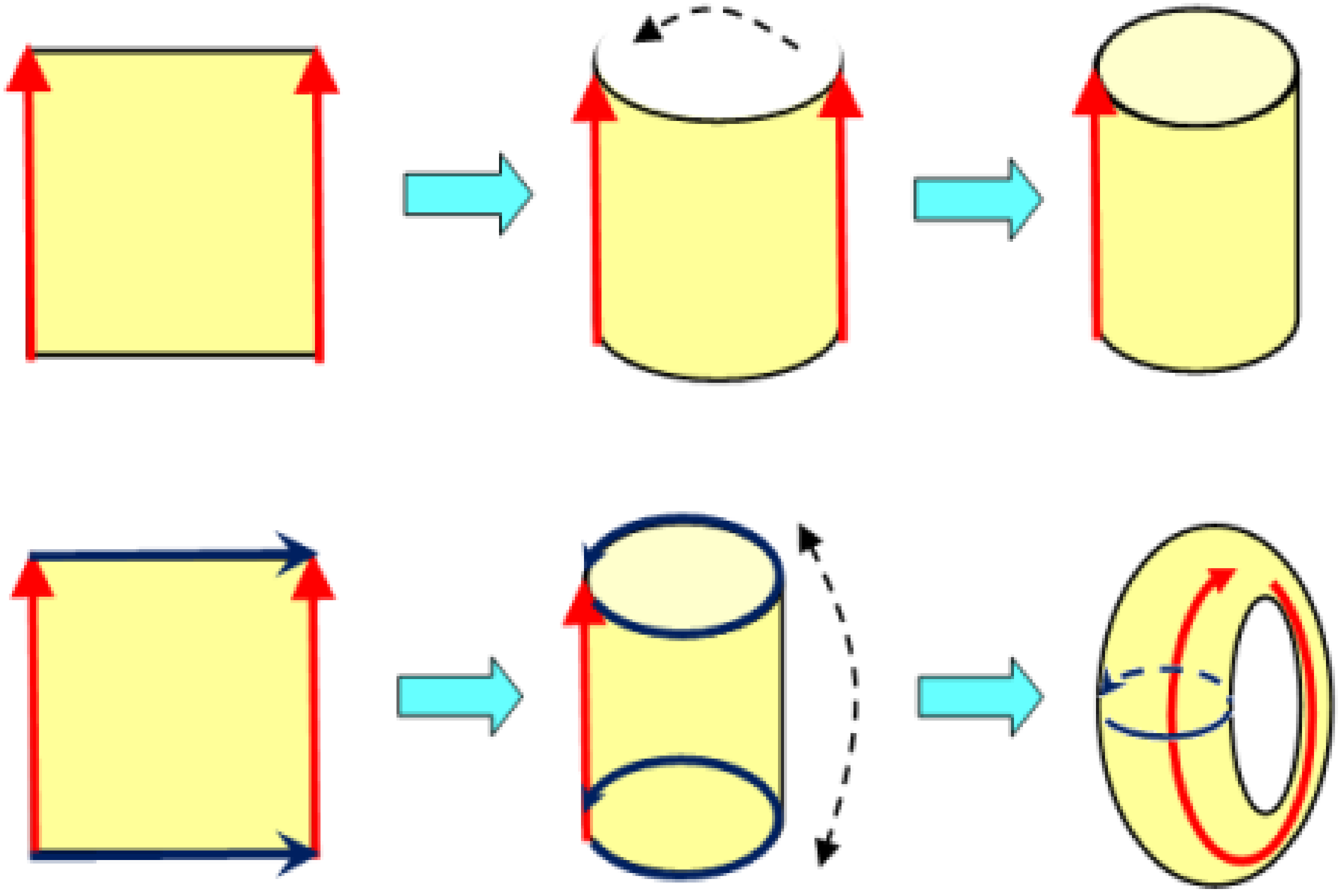
Vermutung (Poincaré, 1904)

Jeder einfach zusammenhängende kompakte Raum lässt sich zur 3-Sphäre deformieren.

Was ist ein kompakter Raum?

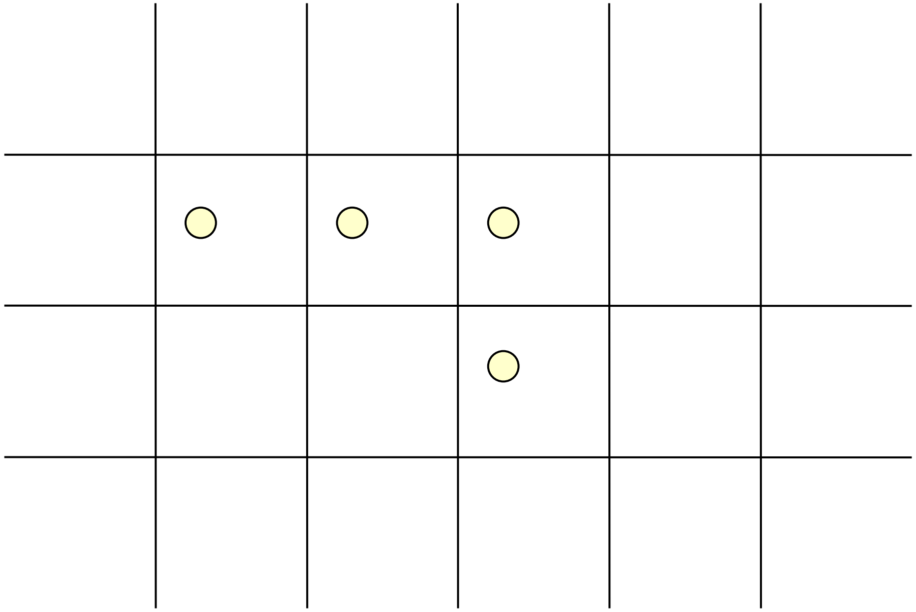
Verkleben – Symmetriegruppen

Beispiel: Der 2-Torus (=Donutoberfläche)



Verkleben – Symmetriegruppen

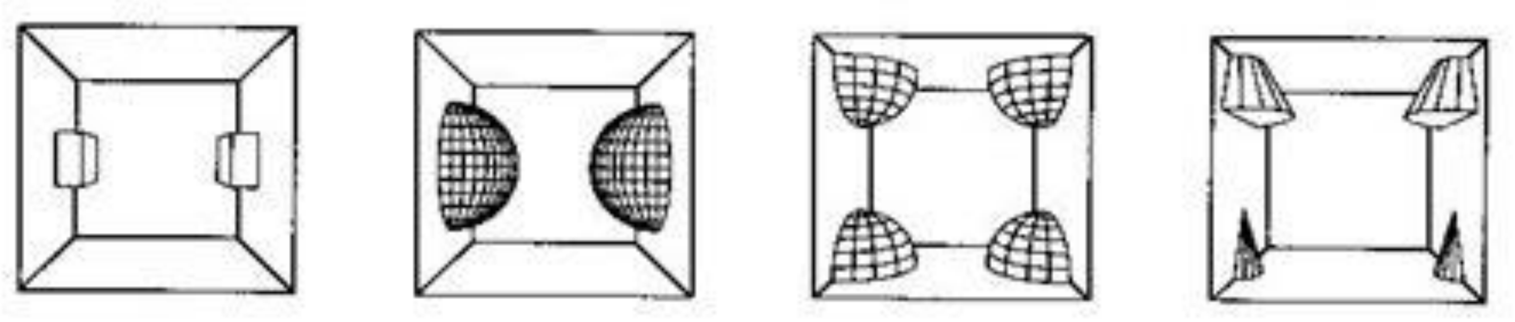
Beispiel: Der 2-Torus



Gitterverschiebungen

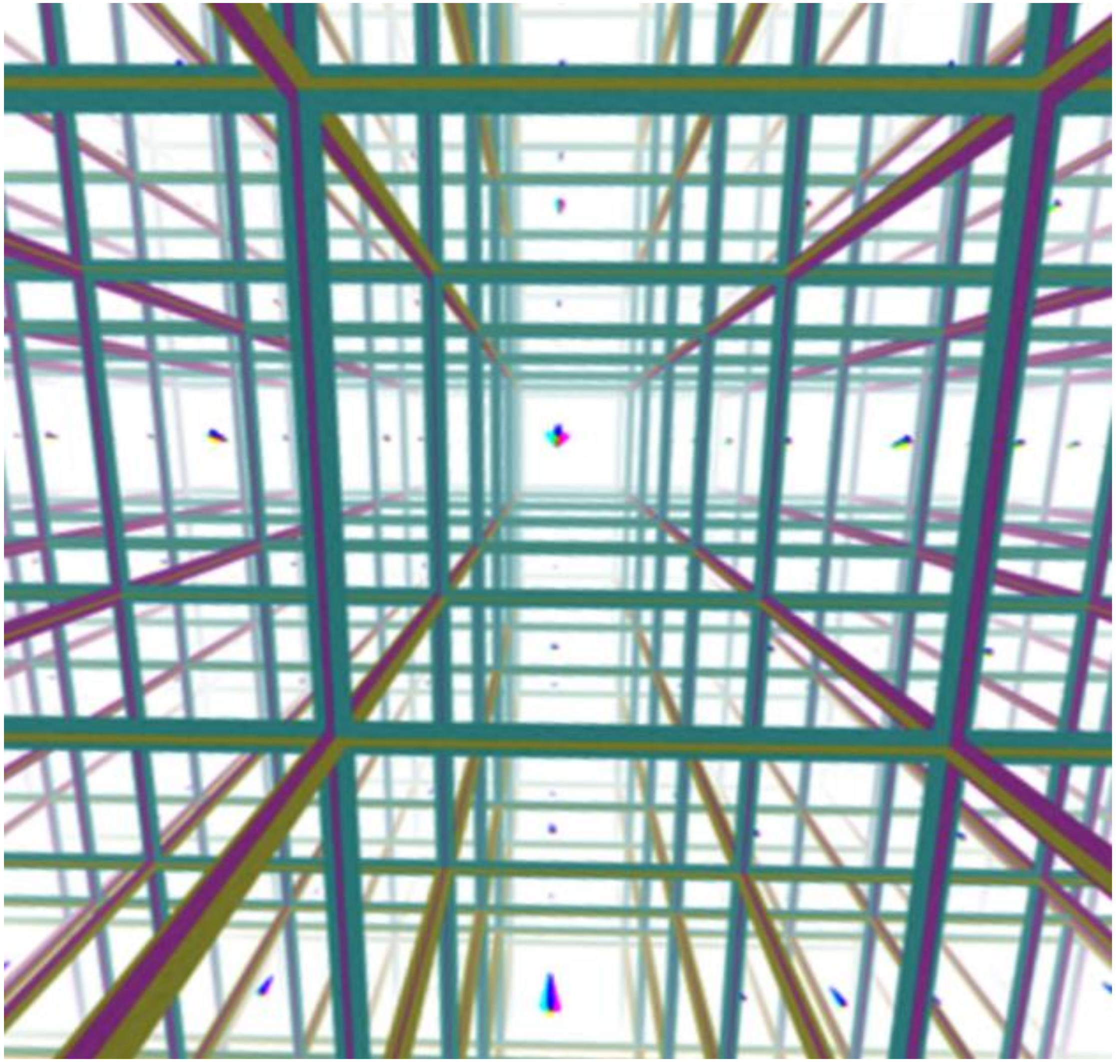
Verkleben – Symmetriegruppen

Beispiel: Der 3-Torus



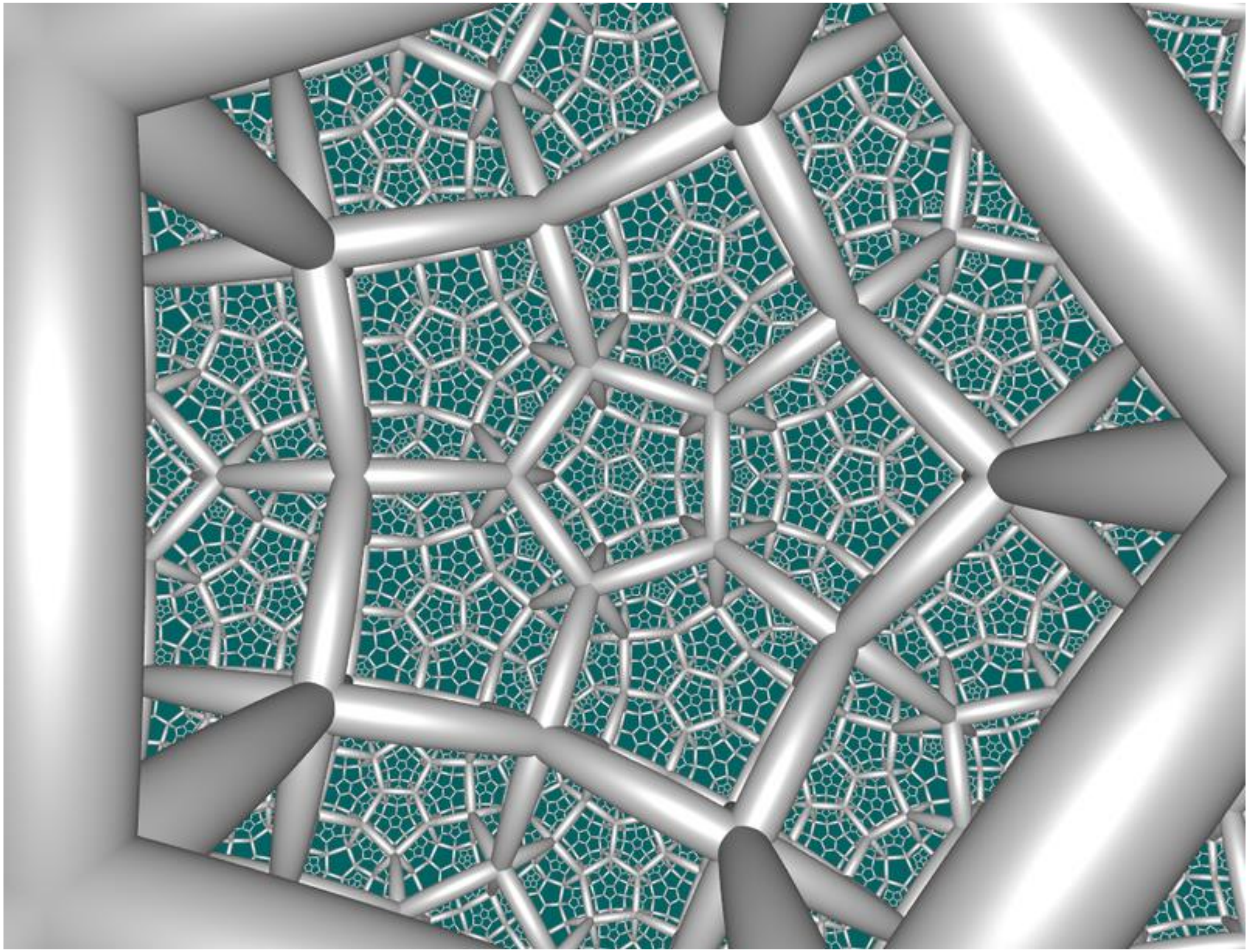
Verkleben – Symmetriegruppen

Beispiel: Der 3-Torus



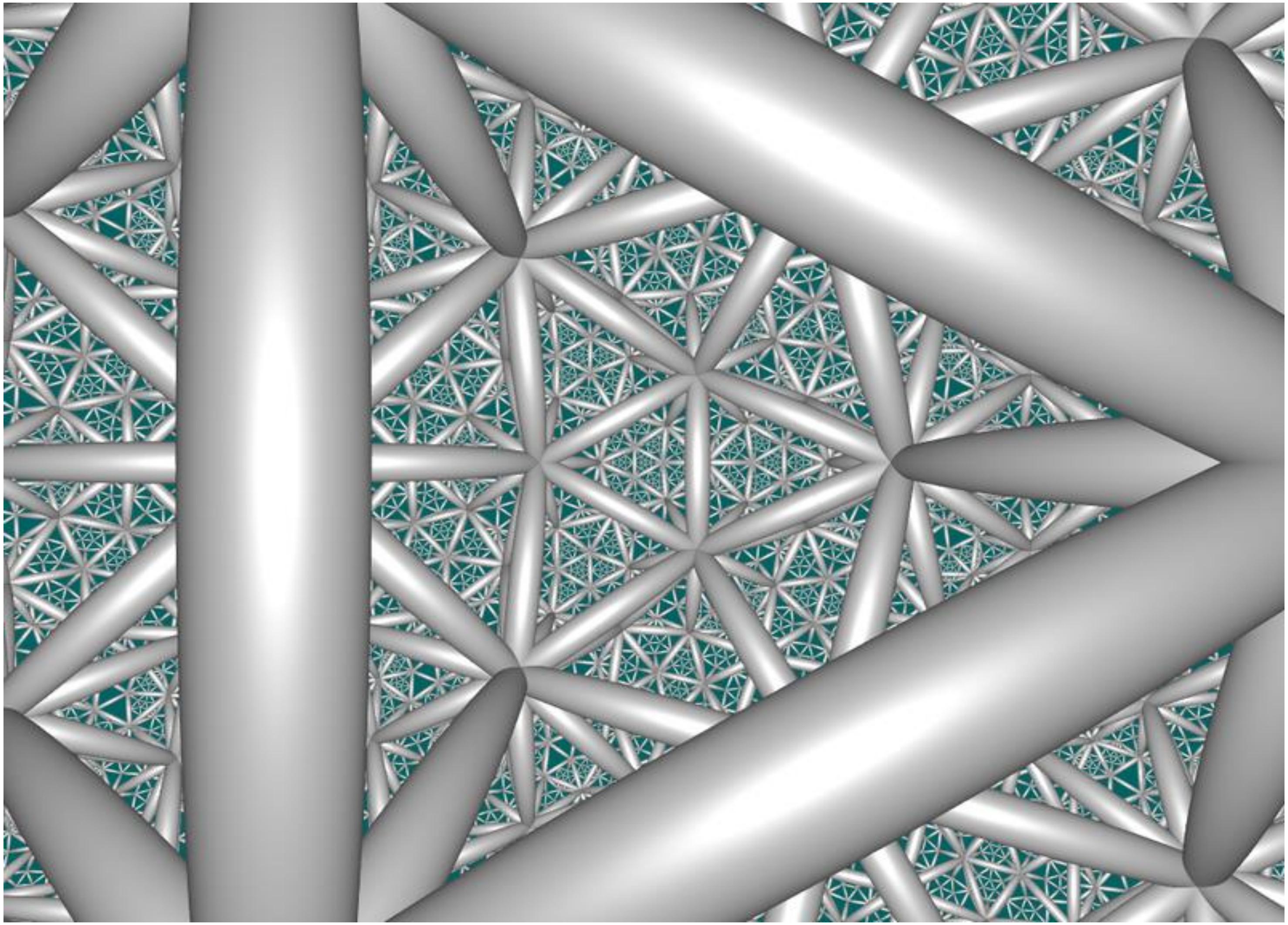
Die gekrümmte Welt

Beispiel: Dodekaeder im hyperbolischen Raum



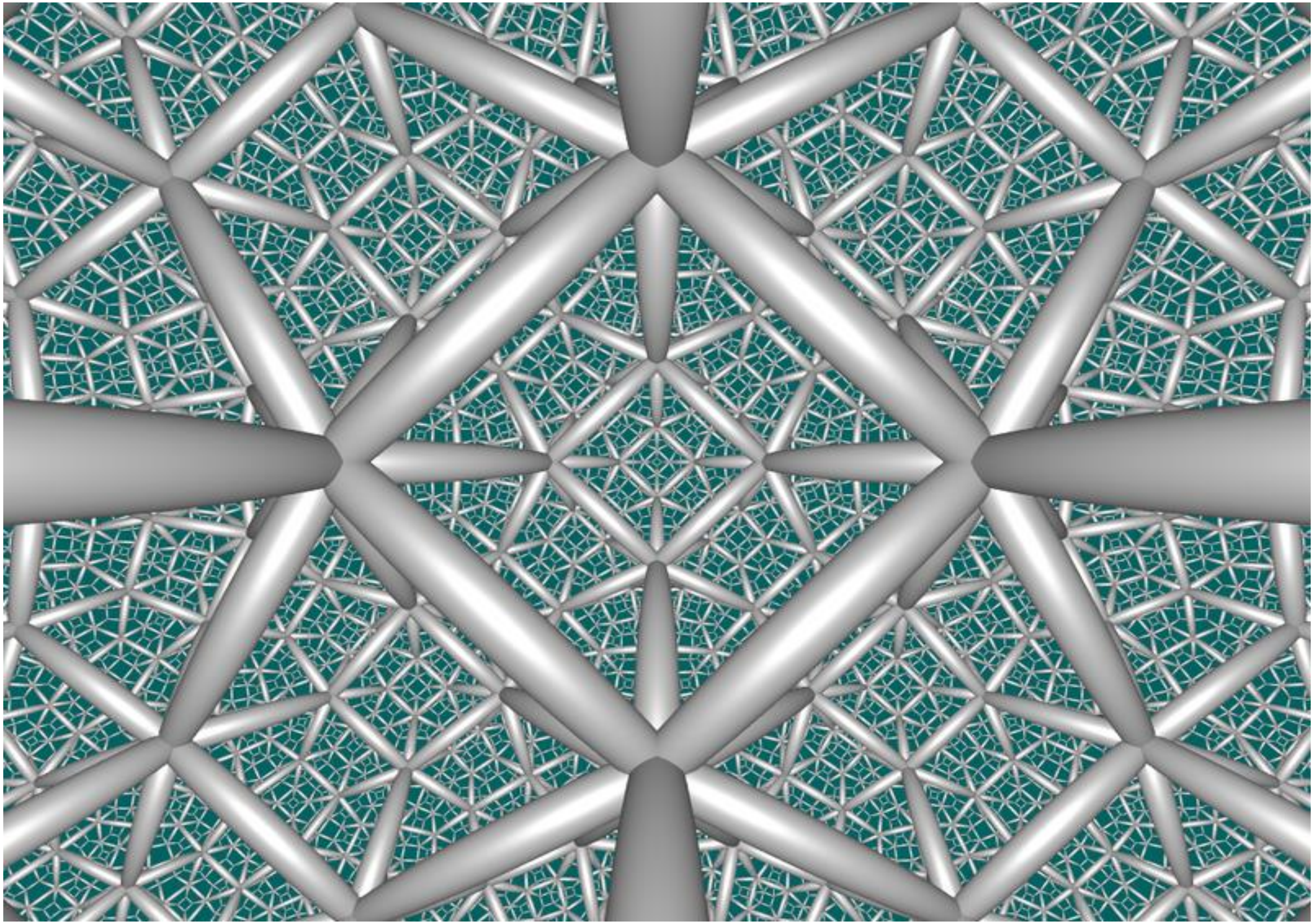
Die gekrümmte Welt

Beispiel: Ikosaeder im hyperbolischen Raum



Die gekrümmte Welt

Beispiel: Würfel im hyperbolischen Raum



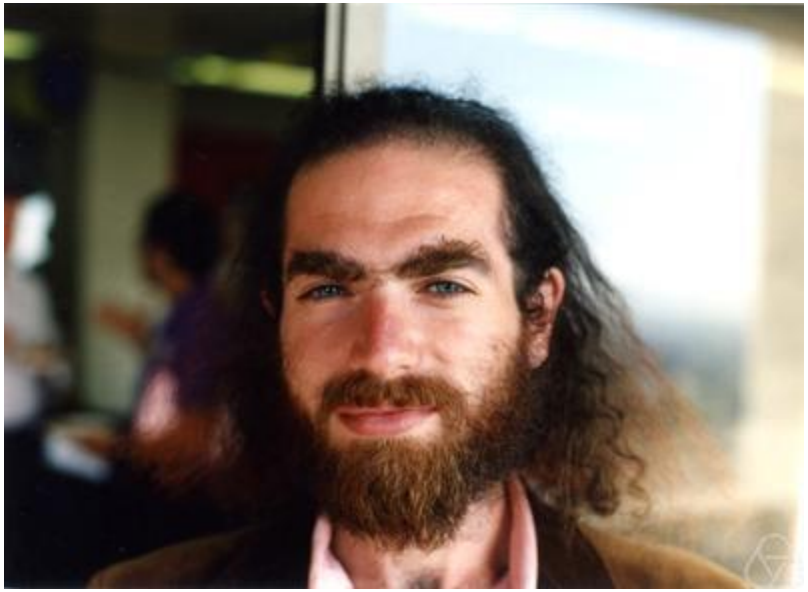
Und jetzt: Eine Dimension mehr!

Vermutung (Poincaré, 1904)

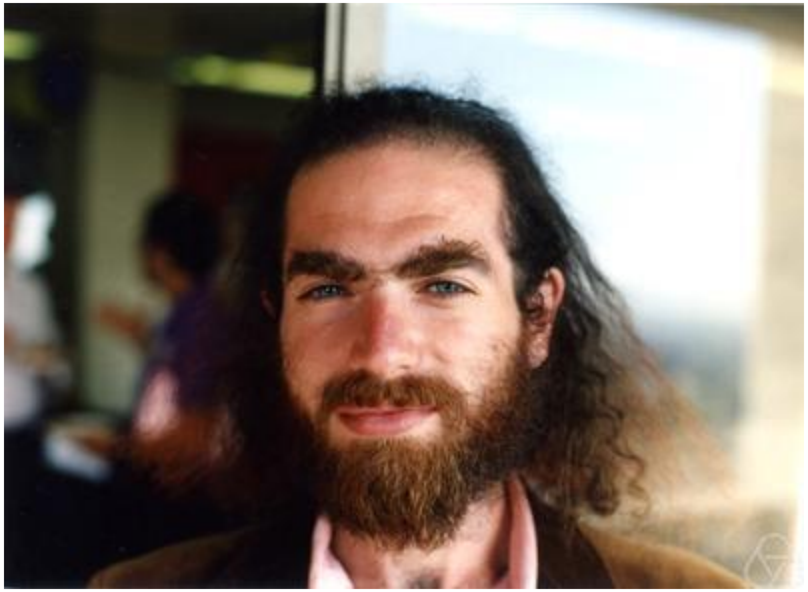
Jeder einfach zusammenhängende kompakte Raum lässt sich zur 3-Sphäre deformieren.

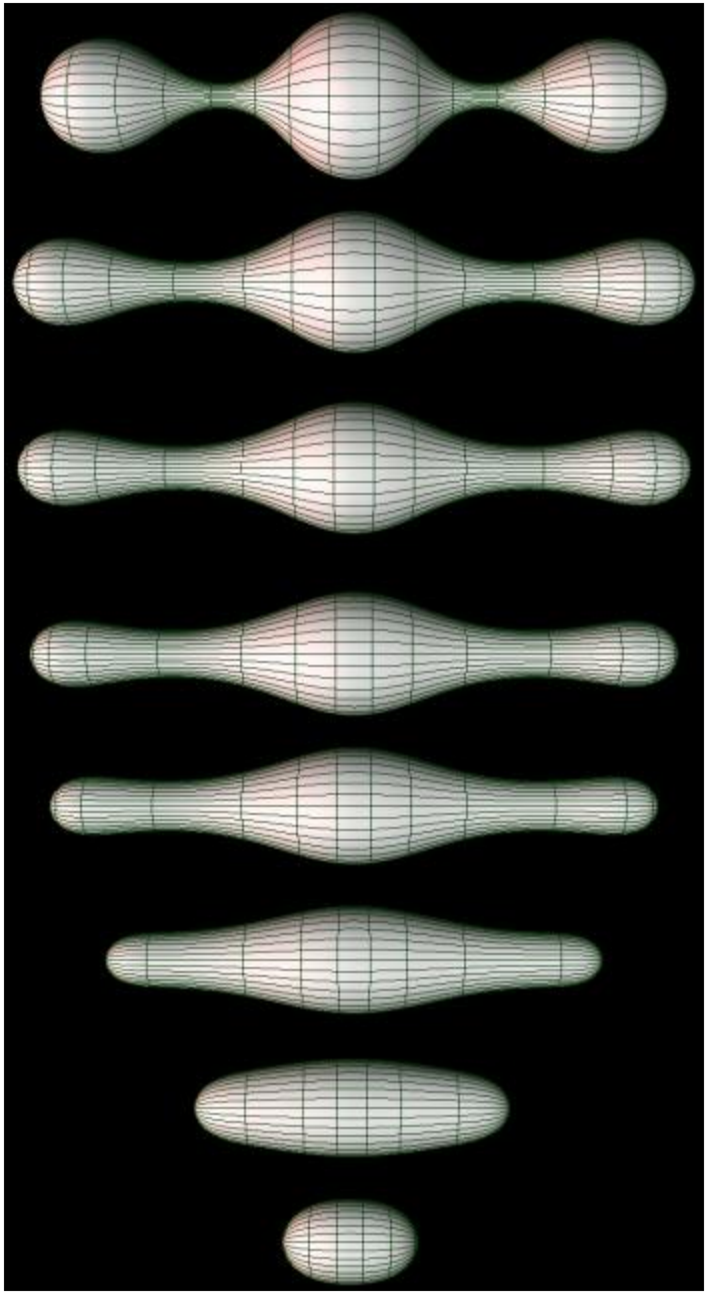
Über 100 Jahre ungelöst
Millenium-Problem: 1 Million US-Dollar Preisgeld

Bewiesen 2002 durch
Gregori Perelman!



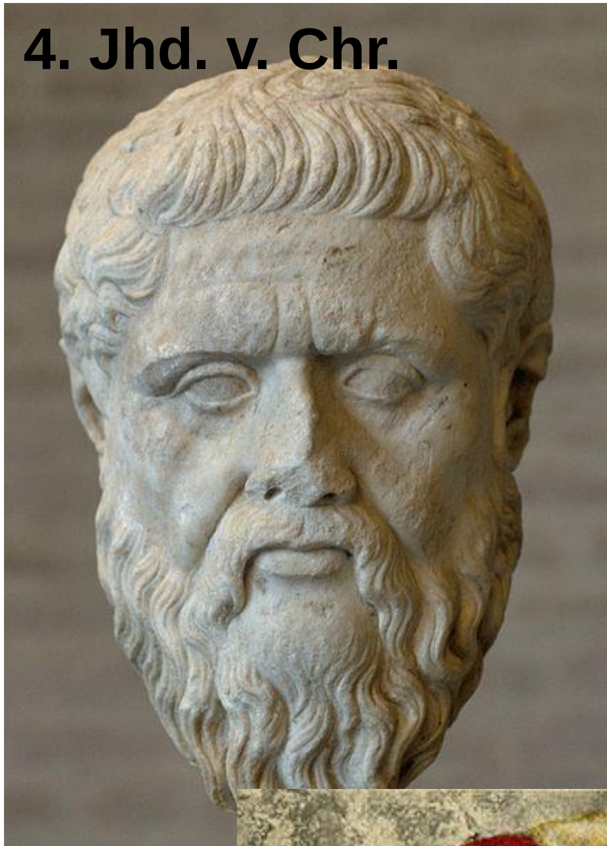
Bewiesen 2002 durch
Gregori Perelman!





Methoden:

Ricci-Fluß (Hamilton)
Geometrisierung
(Fulton)



Süße Träume!