Categorías abelianas con conjugación

Florent Schaffhauser

Universidad de Los Andes (Bogotá)

Coco's Fest 2016

Plan de la charla

Abstract

We present a few examples of categories with a conjugation (whose systematic study in the Banach case was the subject of Lázaro Recht's 1969 MIT thesis) and we consider the problem of existence of moduli spaces for objects that are essentially fixed under that conjugation.

Fechas clave

No has iniciado sesión Discusión Contribuciones Crear una cuenta Acceder

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

Artículo Discusión Leer Editar Ver historial Buscar en Wikipedia

Portada
Portal de la comunidad
Actualidad
Cambios recientes
Páginas nuevas
Página aleatoria
Ayuda
Donaciones
Notificar un error

Imprimir/exportar
Crear un libro
Descargar como PDF
Versión para imprimir

Herramientas
Lo que enlaza aquí
Cambios en enlazadas
Subir archivo
Páginas especiales
Enlace permanente
Información de la página
Elemento de Wikidata
Citar esta página

Idiomas
Añadir enlaces

Lázaro Recht

Lázaro Recht (Buenos Aires, Argentina, 16 de julio de 1941-)[1] es un matemático argentino. Entre otras distinciones, ha recibido, entre otros, el Premio Andrés Bello, mención Ciencias Básicas (1989); el Premio José Francisco Torrealba (1993) que otorga la Asociación de Profesores de la Universidad Simón Bolívar; el Premio Anual al Mejor Trabajo Científico (1994), mención honorífica, en el área de Matemáticas, que le otorgó el CONICIT; y el Premio Lorenzo Mendoza Fleury (2003).[2] Se desempeñaba como Profesor Titular de la Universidad Simón Bolívar. Actualmente trabaja en la Universidad de los Andes en Colombia

Obtuvo su licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Buenos Aires, en 1963, y el Ph.D en el Massachusetts Institute of Technology, EE.UU, en 1969.[3] Se incorporó al Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar en el año 1971 y es Profesor Titular de esa institución desde 1978. Sus principales contribuciones científicas están en el campo de la Geometría del Análisis Funcional y en Geometría Diferencial, aportes que han sido reflejados en 41 artículos publicados en revistas internacionales de alto impacto. Ha sido profesor visitante en prestigiosas universidades de EE.UU, Italia y Argentina. Es miembro correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Argentina.

Es miembro del Sistema de Promoción al Investigador (Nivel IV).

Lázaro Recht	
Información personal	
Nacimiento	16 de julio de 1941 Buenos Aires, Argentina
Nacionalidad	Argentino
Educación	
Alma máter	Universidad de Buenos Aires
Información profesional	
Ocupación	Matemático
Empleador	Universidad de los Andes

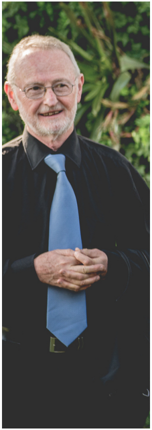
[editar datos en Wikidata]

Referencias [editar]

1. ↑ http://www.iam.conicet.gov.ar/cms/?q=node/86. Falta el |título= (ayuda)
2. ↑ «Premio Fundación Empresas Polar "Lorenzo Mendoza Fleury" 11ª Edición (2003)». Fundación Polar. Archivado desde el original el 5 de noviembre de 2015. Consultado el 13 de diciembre de 2010.
3. ↑ «Lázaro Recht». *Mathematics Genealogy Project* (en inglés). North Dakota State University. Consultado el 13 de diciembre de 2010.

Control de autoridades MGP: 67474

Fechas realmente clave



- 1941: Nace Coco. Se decide ponerle Lázaro, mientras tanto.
- 1958-1963: Se desconoce el paradero exacto de Coco en esos años (*Bella vita militar*, le cantaba el sargento Cabral, mientras lo obligaba a extraer raíces cuadradas a mano).
- 1966: *Noche de los bastones largos.* Llegada de Coco al MIT.
- 1969: *Summer of Love*. Coco obtiene su doctorado.
- 1971: Llegada de Coco a la Universidad Simón Bolívar. De ahí en adelante, se dedica a consentir a sus estudiantes y atormentar a sus colegas. O al revés.

The Boston years

Lefschetz
|
Steenrod
|
Thomas
|
Anderson
|
Recht

- 1965: Atiyah y Segal publican *Equivariant K-theory*
- 1966: Atiyah publica *K-theory and reality*; las notas de ese curso fueron tomadas por D.W. Anderson, quien terminó siendo el director de tesis de Coco.
- 1969: Coco presenta su tesis de doctorado titulada *Banach categories with conjugation*.

Acciones de grupos en categorías

Sea $\mathcal{A}$ una categoría (abeliana) y Σ un grupo. Una acción de Σ en $\mathcal{A}$ consiste de los siguientes datos:

1. Para cada $\sigma \in \Sigma$, un functor

$$F_\sigma : (A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})) \longmapsto (\underbrace{\sigma(A)}_{\text{notación}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}))$$

2. Unos isomorfismos naturales

$$\begin{cases} F_{1_\Sigma} & \simeq & \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \\ F_{\sigma_1} \circ F_{\sigma_2} & \simeq & F_{\sigma_1 \sigma_2} \end{cases}$$

para cada par $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma \times \Sigma$.

Ejemplo: $E \longmapsto \overline{E}$ en la categoría de espacios vectoriales complejos.

Puntos esencialmente fijos

Se le dice así a un par (A, u) donde $A \in \mathrm{Ob}(A)$ y $u = (u_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ es una familia de isomorfismos

$$u_\sigma : \sigma(A) \xrightarrow{\simeq} A$$

tal que $u_{1_\Sigma} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

Observación: Un punto esencialmente fijo (A, u) induce a una aplicación $c_u : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ definida por

$$\begin{tikzcd}
A & \sigma_1(A) \arrow[l, "u_{\sigma_1}"'] & \sigma_1\big(\sigma_2(A)\big) \simeq (\sigma_1\sigma_2)(A) \arrow[l, "\sigma_1(u_{\sigma_2})"'] \arrow[d, "u_{\sigma_1\sigma_2}"] \\
 & & A \arrow[ull, "{\substack{c_u(\sigma_1,\sigma_2) \\ := u_{\sigma_1}\ \sigma_1(u_{\sigma_2}) u_{\sigma_1\sigma_2}^{-1}}}"]
\end{tikzcd}$$

Representaciones lineales de un grupo

Sea π un grupo (por ejemplo el π_1 de una superficie compacta) y sea $\mathcal{A}$ la categoría de representaciones lineales de π (sobre el cuerpo $\mathbb{C}$). Podemos considerar la acción $\rho \longmapsto \overline{\rho}$. Supongamos ρ irreducible. Entonces una aplicación del lema de Schur muestra que un punto esencialmente fijo es una representación real o cuaterniónica.

¿Cómo se entiende eso conceptualmente? Mediante una herramienta contemporánea de Coco.

1940: Eilenberg publica *Cohomology and continuous mappings*.

Tenemos una aplicación

$$\mathcal{T} : \mathcal{A}_{\mathrm{irr}}^{\Sigma} \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}; \underbrace{\mathbb{C}^*}_{\mathrm{Aut}(\rho)}) \simeq \mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}; \mathbb{H}\}$$

y ρ es real si y solamente si $\mathcal{T}(\rho) = \mathbb{R}$.

Fibrados vectoriales

X/k una curva algebraica definida sobre un cuerpo k. Acciones de grupos en la categoría de fibrados vectoriales sobre X:

1. Acciones galoisianas;
2. Acciones que provienen de automorfismos de la curva.

Ejemplo:

$$\begin{tikzcd} E_{\overline{k}} \arrow[r, "\tau_\sigma"] \arrow[d] & E_{\overline{k}} \arrow[d] \\ X_{\overline{k}} \arrow[r, "\sigma"] & X_{\overline{k}} \end{tikzcd}$$

con la condición $\tau_{\sigma_1\sigma_2} = \tau_{\sigma_1}\tau_{\sigma_2}$. Puntos esencialmente fijos que cumplen con esa condición se pueden interpretar como:

1. Fibrados definibles sobre k;
2. Fibrados que descienden a la curva X/Σ, donde $\Sigma \subset \mathrm{Aut}(X)$.

La tesis de Coco

BANACH CATEGORIES WITH CONJUGATION.
Lázaro Recht
Submitted to the Department of Mathematics on August 25,
in partial fulfuillment of the requirement for the degre
Doctor of Philosophy.

ABSTRACT.

This work is devided into two chapters.
Chapter 1 is mainly concerned with the following problems:
i) Given a Banach category $\mathcal{C}$, to construct repre tations for the functors $\{\mathcal{C}(X)\}$ and $K(X;\mathcal{C})$, where $\{\mathcal{C}$ is the monoid of isomorphism classes of bundles over X w fiber in $\mathcal{C}$ and $K(X;\mathcal{C})$ is the Grothendieck group of th category $\mathcal{C}(X)$ of bundles over X with fibre in $\mathcal{C}$. Th functors are defined on the category of compact spaces.
ii) Given a linear continuous functor $\varphi:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ where $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}'$ are Banach categories, to construct a presentation for the functor $K(X;\varphi)$ on the category of compact spaces.
The notions of a Banach category, the category $\mathcal{C}($ the group $K(X;\varphi)$ were introduced by M.KAROUBI (Thèses Université de Paris, 1967, not yet published).
Problems i) and ii) are solved and from the c truction of such representations an exact sequence

$$(*) \quad \ldots\ K_{n+1}(X,Y;\mathcal{C}') \longrightarrow K_n(X,Y;\varphi) \longrightarrow K_n(X,Y;\mathcal{C}) \longrightarrow$$

$$K_n(X,Y;\mathcal{C}') \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_0(X,Y;\varphi) \longrightarrow K_0(X,Y;\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(X,$$

is derived when the functor φ is quasi-surjective, whic is natural with respect to the compact pair (X,Y).

In Chapter 2 generalized cohomology theories $\hat{K}^*(.,.;\mathcal{C})$ and $\check{K}^*(.,.;\mathcal{C})$ are constructed on the catego of compact pairs, based on the notion of a Banach catego with conjugation. Such a category $\mathcal{C}$ is a graded Banach category together with an involutive functor $\sigma:\mathcal{C}\longrightarrow$ and a natural equivalenece $\gamma:id_{\mathcal{C}}\longrightarrow\sigma$ of degree one These theories are "periodic" of period 8 . Finally, in concrete instances of the category $\mathcal{C}$, long exact sequen are constructed relating the groups $\hat{K}^*(pt;\mathcal{C})$ with $KR^*(X$ $K_{Z_2}{}^*(X)$, $KO^*(X)$, where X is a Z_2-space, $KR^*(X)$ is th "real" K-theory of X (cf.M.F.ATIYAH, K-theory and realit $K_{Z_2}{}^*(X)$ is the real equivariat K-theory of X (cf. M.F. ATIYAH and G.B.SEGAL: Equivariant K-theory (Lecture note Oxford, 1965) and $KO^*(X)$ is the usual real K-theory of X. These sequences are found as aplications of a fundame sequence which is derived from $(*)$.

Thesis Supervisor: Donald W. Anderson
Title: Associate Professor of Mathematics

BIOGRAPHICAL NOTE

Name: Lázaro Recht

Date and place of birth: July, 16, 1941. Buenos Aires, Argentina.

Dgrees: Licenciado en Matemáticas, Universidad de Buenos Aires. 1963.

Publications: H.PORTA and L.RECHT: Spectra of algebras of holomorphic germs, Ill. Jour. of Math., to appear.

Teaching experience: Teaching assistant, Univarsity of Buenos Aires . 1963-1966 .
Teaching assistant, M.I.T.. 1966-1969.

Carcajes y sus representaciones

Un carcaj $Q = (V, A, t, h)$ es lo que Coco en su juventud llamaba un grafo orientado. Ejemplo: el carcaj de Jordan.
Una representación de Q en la categoría de k-espacios vectoriales es una familia $\big((W_v)_{v\in V}, (\varphi_a)_{a\in A}\big)$ donde

$$\varphi_a : W_{t(a)} \longrightarrow W_{h(a)}$$

es una aplicación k-lineal. Ejemplo: una representación del carcaj de Jordan es un par (W, φ) donde $\varphi \in \mathrm{End}(W)$.
Automorfismos de Q son pares (σ_V, σ_A) donde

$$\begin{aligned} t(\sigma(a)) = \sigma(t(a)) \text{ y } h(\sigma(a)) = \sigma(h(a)) \quad &\text{si} \quad \sigma \text{ es covariante,} \\ t(\sigma(a)) = \sigma(h(a)) \text{ y } h(\sigma(a)) = \sigma(t(a)) \quad &\text{si} \quad \sigma \text{ es contravariante.} \end{aligned}$$

Posición del problema

Construir un espacio de módulos de representaciones de un carcaj Q y estudiar los puntos fijos de ciertas acciones de grupos en ellos:

- Acciones galoisianas;
- Acciones provenientes de autormorfismos de Q .

A continuación se fijará:

- Un vector de dimensión $d := (d_v)_{v \in V}$;
- Un parámetro de estabilidad $\theta := (\theta_v)_{v \in V}$.

Espacio de módulos grueso

Se define:

- $\mathrm{Rep}_{Q,d} := \prod_{a\in A} \mathrm{Mat}_{\mathrm{d_{h(a)}\times d_{t(a)}}}$;
- $G_{Q,d} := \prod_{v\in V} \mathrm{GL}_{d_v}$.

Entonces $G_{Q,d}$ actúa en $\mathrm{Rep}_{Q,d}$ via

$$(g_v)_v \cdot (M_a)_a := (g_{h(a)} M_a g_{t(a)}^{-1})_a$$

y el conjunto $\mathrm{Rep}_{Q,d}(k)/G_{Q,d}(k)$ está en biyección con el conjunto de clases de isomorfismo de k-representaciones d-dimensionales de Q.

Consecuencia: el funtor $F : Sch_k \longrightarrow \mathrm{Sets}$ que envía un k-esquema B a familias de k-representaciones d-dimensionales de Q parametrizadas por B es co-representable si y solamente si existe un cociente categórico de $\mathrm{Rep}_{Q,d}$ por $G_{Q,d}$. El problema es que tal cociente es trivial si Q no tiene ciclos...

(Semi-)estabilidad

Se dice que una representación W de Q es (semi-)estable si, para cualquier sub-representación no trivial $W' \subset W$, se tiene

$$\mu_\theta(W')(\leq)\mu_\theta(W) := \frac{\sum_{v\in V} \theta_v \dim W_v}{\sum_{v\in V} \dim W_v}.$$

Proposición

Sea L una extensión de k. Entonces W es semi-estable si y solamente si $L \otimes_K W$ es semi-estable.

Consecuencia: se puede definir un funtor

$$F_{Q,d}^{\theta-ss} : Sch_k \longrightarrow \mathrm{Sets}.$$

Lo análogo no es cierto para estabilidad (salvo si $k = \overline{k}$).

Teoría geométrica de invariantes

Para co-representar $F_{Q,d}^{\theta-ss}$, es suficiente encontrar un k-esquema $\mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-ss}$ tal que todo k-esquema B posee un cubrimiento abierto $(B_i)_{i\in I}$ que cumple con la propiedad

$$F_{Q,d}^{\theta-ss}(B_i) \simeq \mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-ss}(B_i)/G_{Q,d}(B_i)$$

y tal que el cociente categórico de $\mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-ss}$ por $G_{Q,d}$ existe.

Teorema (A. King, '94)

Existe un caracter $\chi_\theta : G_{Q,d} \longrightarrow \mathbb{G}_m$ tal que $M \in \mathrm{Rep}_{Q,d}(\overline{k})$ es θ-semi-estable si y solamente si M es GIT-semi-estable con respecto a χ_θ.

La clave para la demostración es el criterio de Hilbert-Mumford.

Cociente geométrico

La teoría geométrica de invariantes (para acciones linealizables de grupos reductivos) garantiza la existencia de un cociente categórico $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-ss} := \mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-ss}//G_{Q,d}$ y de un cociente geométrico $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs} := \mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-s}/G_{Q,d}$.

Si $k \neq \overline{k}$, los $\overline{k}$-puntos de $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}$ están en biyección con clases de isomorfismo de $\overline{k}$-representaciones de Q que son d-dimensionales y *geométricamente* estables.

El establizador de un punto geométricamente estable $M \in \mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta-s}$ es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{G}_{m,\kappa(M)}$. El último punto nos permite estudiar convenientemente acciones de grupos en $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(\overline{k})$.

Acciones galoisianas

$\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}$ es una k-variedad algebraica. Por lo tanto, Gal_k actúa en $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(\overline{k})$. Si suponemos que k es perfecto, entonces tenemos $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(\overline{k})^{\mathrm{Gal}_k} \simeq \mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(k)$ y existe una aplicación

$$f_{\mathrm{Gal}_k} : \mathrm{Rep}_{Q,d}(k)/G_{Q,d}(k) \longrightarrow (\mathrm{Rep}_{Q,d}/G_{Q,d})(k).$$

Proposición

Las fibras no vacías de esta aplicación están en biyección con el núcleo de la aplicación punteada

$$H^1(\mathrm{Gal}_k; \overline{k}^{\times}) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}_k; G_{Q,d}(\overline{k})).$$

En particular, f_{Gal_k} es inyectiva (Teorema 90 de Hilbert).

k-puntos que no provienen de k-representaciones

f_{Gal_k} no es sobreyectiva en general: tenemos una aplicación

$$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(k) \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}_k; \overline{k}^\times) \simeq \mathrm{Br}(k)$$

y se tiene $\mathrm{Im}\, f_{\mathrm{Gal}_k} = \mathcal{T}^{-1}([1])$. En particular

$$F_{Q,d}^{\theta-gs}(k) \simeq \mathcal{T}^{-1}([1]) \subset \mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(k).$$

Caso particular: si k es finito (en particular, k es perfecto), entonces $F_{Q,d}^{\theta-gs}(k) \simeq \mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}(k)$.

Es posible dar una interpretación modular de k-puntos de $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}$ con clase de Brauer no trivial.

Acciones algebraicas

Sea $\Sigma \subset \mathrm{Aut}^+(Q)$ un grupo (finito) de automorfismos covariantes de Q. El grupo Σ también actúa en $G_{Q,d}$ y la acción de este último en $\mathrm{Rep}_{Q,d}$ se extiende a una acción de $G_{Q,d} \rtimes \Sigma$. Supongamos que d y θ son Σ-compatibles. Entonces existe una acción algebraica de Σ en $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-ss}$ y $\mathcal{M}_{Q,d}^{\theta-gs}$ y tenemos un morfismo

$$f_\Sigma : (\mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta - s})^\Sigma / G_{Q,d}^\Sigma \longrightarrow (\mathrm{Rep}_{Q,d}^{\chi_\theta - s} / G_{Q,d})^\Sigma.$$

El espacio a la izquierda es un espacio de módulos para representaciones del carcaj cociente Q/Σ. Podemos analizar f_Σ como en el caso galoisiano y no es inyectiva ni sobreyectiva en general.

Duplicar el carcaj

Cuando $k = \mathbb{C}$, ciertos espacios de módulos de representaciones de carcajes tienen una estructura particularmente rica.
Dado un carcaj Q, se considera el carcaj $\overline{Q}$, obtenido al agregar una fecha a^* para cualquier flecha $a \in A$, entre los mismos vértices y en el sentido opuesto:

$$\mathrm{Rep}_{\overline{Q},d} \simeq T^*\mathrm{Rep}_{Q,d}$$

tiene una estructura hiperkähleriana natural. El espacio de módulos asociado hereda esa estructura.
Dos involuciones naturales en $\mathcal{M}^{\theta-ss}_{\overline{Q},d}$:

- τ, inducida por la conjugación compleja;
- σ, inducida por $a \longmapsto a^*$.

Se tiene $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Sub-variedades notables

En una variedad kähleriana (M, g, J), una A-membrana es una sub-variedad (totalmente geodésica y) totalmente real (Lagrangiana). Una B-membrana es una sub-variedad (totalmente geodésica y) compleja.
En una variedad hiper-kähleriana (M, g, I, J, K), tenemos *a priori* membranas con respecto a cada una de las tres estructuras complejas I, J y K. Por las relaciones de Hamilton

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1,$$

solamente pueden existir cuatro tipos de membranas: (B, B, B), (B, A, A), (A, B, A) y (A, A, B).

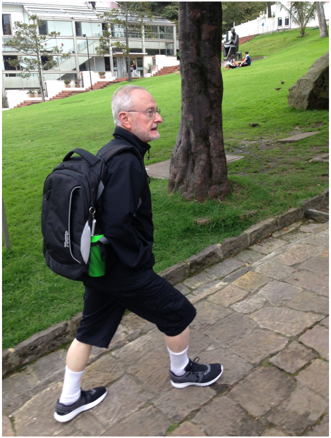
Puntos fijos

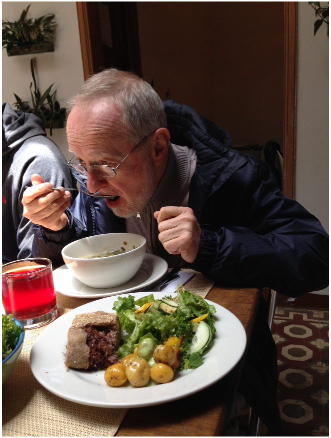
A través de acciones de grupos (finitos), podemos obtener los cuatro tipo de membranas.

Teorema (Hoskins-S.)

Si $\Sigma \subset \mathrm{Aut}^+(Q)$ *consiste de automorfismos simplécticos, el conjunto de puntos* Σ*-fijos es una membrana de tipo* (B, B, B)*.*
El conjunto de puntos fijos de la conjugación compleja es una membrana de tipo (B, A, A)*.*
El conjunto de puntos fijos de la involución $a \longmapsto a^*$ *es una membrana de tipo* (A, B, A)*.*
El conjunto de puntos fijos de la involución compuesta es una membrana de tipo (A, A, B)*.*

Ya es hora de volver al día a día





Con sus guardaespaldas

Parce que c'était lui, parce que c'était moi