

# El Grupo Modular de una superficie compacta orientable

Simón Andrés Soto Ochoa  
(Dirigido por: Florent Schaffhauser)

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Curvas . . . . .	2
1.2. Arcos . . . . .	2
1.3. Resultados previos . . . . .	3
<b>2. Ejemplos</b>	<b>4</b>
2.1. Superficies compactas . . . . .	4
2.2. Superficies con puntos marcados . . . . .	11
<b>3. Twists de Dehn</b>	<b>15</b>
3.1. Propiedades de los Twists de Dehn . . . . .	16
3.2. El teorema de Lickorish . . . . .	19

## 1. Introducción

Sea  $(S, P)$  una superficie topológica compacta, conexa y orientable, posiblemente con borde y  $P := \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  un conjunto finito de puntos de  $S$ . Sea  $\text{Homeo}_\partial^+(S, P)$  el grupo de homeomorfismos  $f : S \rightarrow S$  que preserven la orientación, tales que  $f|_{\partial S} = id_{\partial S}$  y que  $f(P) \subset P$ . A continuación llamaremos automorfismo de  $S$  un elemento  $f$  de  $\text{Homeo}_\partial^+(S, P)$ . La siguiente definición formaliza la noción de deformación continua entre homeomorfismos.

**Definición 1.1** (Isotopía). *Una isotopía entre dos elementos  $f$  y  $g$  perteneciendo a  $\text{Homeo}_\partial^+(S, P)$  es una aplicación continua  $H : S \times [0; 1] \rightarrow S$  tal que:*

1. Para cualquier  $t \in [0; 1]$ , la aplicación  $H(\cdot, t) : S \rightarrow S$  es un elemento de  $\text{Homeo}_\partial^+(S, P)$ .
2. Para cualquier  $x \in S$ ,  $H(x, 0) = f(x)$ .
3. Para cualquier  $x \in S$ ,  $H(x, 1) = g(x)$ .

Si existe una isotopía entre  $f$  y  $g$ , se dice que  $f$  y  $g$  son isótopos. Denotaremos  $f \sim g$  la relación  $f$  es isótopo a  $g$ .

La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.

**Definición 1.2.** Sean  $[f], [g] \in \text{Mod}(S)$  entonces  $[f] \circ [g] := [f \circ g]$

Primero miremos que ésta es una buena definición. Sean  $f, f' \in [f]$ ,  $g, g' \in [g]$ , queremos ver que  $[f \circ g] = [f' \circ g']$  es decir, queremos ver que  $f \circ g \sim f' \circ g'$ . Sabemos que existen

$$\begin{aligned} F : S \times [0; 1] &\rightarrow S : F(0, x) = f(x) & F(1, x) &= f'(x) \\ G : S \times [0; 1] &\rightarrow S : G(0, x) = g(x) & G(1, x) &= g'(x) \end{aligned}$$

homotopías entre  $f, f'$  y  $g, g'$ . Defina ahora

$$H : S \times [0; 1] \rightarrow S : H(t, x) = G(t, F(t, x))$$

$H$  es continua porque  $G$  y  $F$  lo son. Además  $H(0, x) = G(0, F(0, x)) = G(0, f(x)) = (g \circ f)(x)$  y  $H(1, x) = G(1, F(1, x)) = G(1, f'(x)) = (g' \circ f')(x)$ .

Entonces tenemos que  $f \circ g \sim f' \circ g'$  por ende  $[f \circ g] = [f' \circ g']$  y tenemos una buena definición.

A partir de la noción de isotopía, se define el grupo modular de una superficie.

**Definición 1.3.** El grupo modular de  $\Sigma = (S, P)$  es el conjunto

$$\text{Mod}(\Sigma) := \text{Homeo}_0^+(S, P) / \sim$$

con la operación de grupo dada por la definición 2.

## 1.1. Curvas

**Definición 1.4.** Una **curva cerrada** sobre una superficie  $S$  es una aplicación continua  $c : S_1 \rightarrow S$ . Se dice que una curva cerrada es **simple** si establece un homeomorfo entre  $S_1$  y  $c(S_1)$ , este último con la topología inducida por la topología de  $S$ . Se dice que es **esencial** la curva  $c$ , si no es homótopa a un punto marcado o a un componente de frontera.

**Definición 1.5 (Número de intersección geométrica).** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas sobre  $S$ . Su número de intersección geométrica es el entero

$$i(\alpha, \beta) := \min\{|\alpha' \cap \beta'| \mid \alpha' \in [\alpha], \beta' \in [\beta]\}.$$

## 1.2. Arcos

**Definición 1.6.** Sea  $(S, P)$  una superficie compacta, posiblemente con frontera y con  $P$  finito. Un **arco propio** en  $S$  es una aplicación  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  tal que  $\alpha^{-1}(P \cap \partial S) = \{0, 1\}$ . Se dice que el arco propio  $\alpha$  es **simple** si es inyectivo. Se dice que es **esencial** si no es homótopo a un componente de frontera de  $S$  o un punto marcado.

Falta hacer una aclaración: Una homotopía se dice relativa si dados  $\gamma, \gamma' : I \rightarrow S$  con  $\gamma(0) = \gamma'(0) \in \partial S$  y  $\gamma(1) = \gamma'(1) \in \partial S$  y una homotopía entre los arcos  $H : I \times I \rightarrow S$  se debe cumplir:

$$\begin{aligned} H(0, x) &= \gamma(x) \\ H(1, x) &= \gamma'(x) \\ H(s, 0) &= \gamma(0) = \gamma'(0) \\ H(s, 1) &= \gamma(1) = \gamma'(1) \end{aligned}$$

Este breve estudio sobre los arcos, será importante en los ejemplos de las superficies con puntos marcados más adelante.

### 1.3. Resultados previos

#### 1.3.1. Homotopía vs Isotopía para curvas cerradas simples

**Definición 1.7.** *Dos curvas cerradas simples  $\alpha, \beta$  son isotópicas si hay una homotopía*

$$H : S_1 \times [0; 1] \rightarrow S$$

entre  $\alpha$  y  $\beta$  con la propiedad que la curva cerrada  $H(S_1 \times \{t\})$  es simple para cada  $t \in [0; 1]$ .

En algunos casos, es más sencillo pensar en homotopía sobre isotopía, pero esto no va a ser una complicación gracias a un hecho originario de Baer.

**Proposición 1.1.** *[4, Prop. 1.10] Sean  $\alpha, \beta$  dos curvas cerradas esenciales simples en una superficie  $S$ . Entonces  $\alpha$  es isotopo a  $\beta$  si y sólo si  $\alpha$  es homótopo a  $\beta$ .*

Teniendo una isotopía entre dos curvas cerradas simples en  $S$ , es útil poder extender esta isotopía a una isotopía de la superficie  $S$  lo que se conocerá como la isotopía de ambiente de  $S$ .

**Proposición 1.2.** *[4] Sea  $S$  una superficie. Si  $F : S_1 \times [0; 1] \rightarrow S$  es una isotopía de curvas cerradas simples, entonces existe una isotopía  $H : S \times [0; 1] \rightarrow S$  tal que*

$$H|_{S \times \{0\}} = id_S \quad H(\gamma_0(\theta), t) = F(\theta, t)$$

donde  $\gamma_0$  es la curva dad por  $F(S_1 \times \{0\})$

#### 1.3.2. Sobre las curvas ceradas simples

##### ■ Clasificación de curvas cerradas simples

**Definición 1.8 (Cortes de superficies).** *[4] Dada una curva cerrada simple  $\alpha$  en una superficie  $S$ , la superficie obtenida cortando a  $S$  a lo largo de  $\alpha$  es la superficie compacta  $S_\alpha$  equipado con un homeomorfismo  $h$  entre dos de sus componentes de frontera tal que:*

1. El cociente  $S_\alpha/(x \sim h(x))$  es homeomorfo a  $S$ .
2. El dominio y la imagen de  $h$  son una copia homeomorfa de  $\alpha$ .

Esta definición también se tiene cuando se quiere cortar a lo largo de un arco propio simple. Por último, una curva cerrada simple se dice que es **no separadora** si la superficie  $S_\alpha$  es conexa, de lo contrario, se dice **separadora**.

- Relación entre curvas no separadoras.

**Afirmación 1.** [4] Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos curvas cerradas simples no separadoras en una superficie  $S$ , entonces existe un homeomorfismo  $\phi : S \rightarrow S$  con la propiedad que  $\phi(\alpha) = \beta$ .

## 2. Ejemplos

**Notación:** La superficie  $S_{g,n}$  hace referencia a una superficie con género  $g$  y con  $n$  puntos marcados.

### 2.1. Superficies compactas

#### 2.1.1. Disco cerrado ( $D^2$ )

**Proposición 2.1.** [5] El grupo modular  $\text{Mod}(D^2)$  del disco cerrado ( $D^2$ ) es trivial.

Éste es un resultado clásico que es conocido como el “truco de Alexander”

*Demostración.* Sea  $f : D^2 \rightarrow D^2$  un homeomorfismo del disco que preserva la orientación y es la identidad en el borde. Lo que queremos ver es que podemos deformar a  $f$  continuamente dentro de  $\text{Homeo}^+(D^2)$  hasta volverla la identidad. Para todo  $t \in [0, 1]$  defina  $f_t(x) : D^2 \rightarrow D^2$  tal que:

$$f_t(x) = \begin{cases} tf\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \leq |x| < t \\ x & t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

$f_0$  es la identidad de  $D^2$  y  $f_1$  es el homeomorfismo original por lo que tenemos una homotopía entre  $f$  y la identidad y como isotopía coincide con homotopía en dimensión 2, tenemos una isotopía entre  $f$  y la identidad.  $\square$

#### 2.1.2. Anillo ( $A$ )

**Proposición 2.2.** El grupo modular del anillo ( $A = S_1 \times I$ )  $\text{Mod}(A)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}$  y también  $H_1(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Sea  $a = [S_1 \times \frac{1}{2}]$  un generador de  $H_1(A, \mathbb{Z})$  y sea  $\rho := \{1\} \times I \in A$ .

$$\phi : \text{Mod}(A) \rightarrow \mathbb{Z} : [f] \mapsto k$$

Donde  $k.a = [\rho^{-1} * f(\rho)]$

Entonces  $\phi$  es un isomorfismo.

Toca notar primero que si  $f, f' \in [f]$  sabemos que  $f(\rho)$  es homótopo a  $f'(\rho)$  por ende  $[\rho^{-1} * f(\rho)] = [\rho^{-1} * f'(\rho)]$  y no tenemos problema con la definición de  $\phi$ .

- $\phi([id]) = 0$  ya que  $0.a = [\rho^{-1} * id(\rho)] = [\rho^{-1} * \rho] = [id]$
- Sean  $[f][g] \in \text{Mod}(A)$  con  $[f] \neq [g]$ . Queremos probar que  $\phi([f \circ g]) = \phi([f]) + \phi([g])$   
Sean  $s = \phi([f])$  y  $t = \phi([g])$  por lo tanto,  $s.a = [\rho^{-1} * f(\rho)]$  y  $t.a = [\rho^{-1} * g(\rho)]$  Ahora

$$\begin{aligned} \rho^{-1} * (f \circ g)(\rho) &= \rho^{-1} * f(g(\rho)) \\ &= \rho^{-1} * f(\rho * \rho^{-1} * g(\rho)) \\ &= \rho^{-1} * f(\rho) * f(\rho^{-1} * g(\rho)) \\ &= s.a + f(t.a) \\ &= s.a + t.f(a) \\ &= (s + t).a \end{aligned}$$

Entonces  $\phi$  es un homomorfismo de grupos.

**Sobreyectividad:** Sea  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times I$  la cubierta universal de  $A$  y sea  $F_n : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  un homeomorfismo que preserva la orientación asociado a  $n \in \mathbb{Z}$  que viene dado por la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  entonces  $\tilde{A} \ni (x, t) \mapsto (x + nt, t)$  haciendo conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{F_n} & \tilde{A} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f_n} & A \end{array}$$

Luego, por el diagrama, la proyección canónica manda a  $(x, t) \mapsto (e^{2\pi i x}, t)$  induciendo  $f_n : A \rightarrow A$  un homeomorfismo que preserva orientación y que es la identidad en la frontera de  $A$  ya que  $F_n(x, 0) = (x, 0)$  y  $F_n(x, 1) = (x + n, 1)$  por lo que se tiene que en  $f_n$  que

$$p(x + n, 1) = (e^{2\pi i(x+n)}, 1) = (e^{2\pi i x} e^{2\pi i n}, 1) = p(x, 1)$$

Y para un  $(x, t)$  arbitrario:

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & \xrightarrow{F_n} & (x + nt, t) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ (e^{2\pi i x}, t) & \xrightarrow{f_n} & (e^{2\pi i(x+nt)}, t) \end{array}$$

que lo que está haciendo en  $\rho$  es deformarlo para que deje fijos los extremos y gire alrededor de la frontera interior, por lo que se puede ver que debe dar  $n$  vueltas y por ende  $\phi([f_n]) = n$ .

**Inyectividad:** Sea  $[f] \in \text{Mod}(A)$  un homomorfismo que preserva orientación y es la identidad en la frontera tal que  $\phi([f]) = 0$ . Sabemos que se puede levantar de manera única a  $f$  a un  $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$  con  $\tilde{f}(0) = 0$  y por hipótesis sobre  $f$ ,  $\tilde{f}$  es  $\mathbb{Z}$ -equivariante. Además, como por hipótesis,  $\phi([f]) = 0$ , el levantamiento es la identidad en la frontera de  $\tilde{A}$ . Por lo tanto podemos formular la siguiente homotopía llamada la homotopía afín.

$$H : \tilde{A} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{A} : ((x, t), s) \mapsto s\tilde{f}(x, t) + (1 - s)(x, t)$$

que es una homotopía entre  $Id_{\tilde{A}}$  y  $\tilde{f}$  y es equivariante con respecto a  $\mathbb{Z}$  ya que dado  $(n, 0) \in \mathbb{Z} \times 0 \simeq \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H((x, t) + (n, 0), s) &= s\tilde{f}(x + n, t) + (1 - s)(x + n, t) \\ &= s(\tilde{f}(x, t) + (n, 0)) + (1 - s)(x, t) + (1 - s)(n, 0) \\ &= s\tilde{f}(x, t) + t(n, 0) + (1 - s)(x, t) + (1 - s)(n, 0) \\ &= s\tilde{f}(x, t) + (1 - s)(x, t) + (n, 0) \\ &= H(x, t, s) + (n, 0) \end{aligned}$$

Entonces, esta homotopía desciende a una homotopía entre  $Id_A$  y  $f$ . Como en dimensión 2, homotopía coincide con isotopía, podemos concluir que  $[f] = 1 \in \text{Mod}(A)$   $\square$

Con esta transformación de  $\rho$  dada por los diferentes elementos de  $\text{Mod}(A)$  podemos dar una primera idea de lo que se llama **Twist de Dehn**. Un Twist de Dehn asociado a la curva  $\rho(\tau_\rho)$  viene siendo  $f_1(\rho)$  i.e. es un generador de  $\text{Mod}(A)$ .

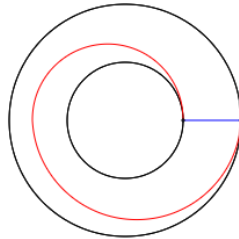


Figura 1: Twist de Dehn

### 2.1.3. Esfera ( $S_2$ )

**Proposición 2.3.** *El grupo modular de la esfera  $S_2$  es trivial.*

*Demostración.* Sea  $f : S_2 \rightarrow S_2$  un homeomorfismo que preserve orientación y sea  $\gamma$  una curva simple cerrada sobre  $S_2$ . Usando el hecho de homología que dos curvas cerradas sobre  $S_2$  son homótopas, podemos decir que  $f(\gamma)$  es homotópico a  $\gamma$ , por ende, podemos asumir que  $f(\gamma) = \gamma$ . Luego podemos cortar a  $S_2$  por esta curva y el resultado es identificable con  $D^2$  (En este caso, dos discos) y sabemos por el **truco de Alexander** tiene grupo modular trivial. Por ende, tenemos que  $\text{Mod}(S_2)$  es trivial y si denotamos  $D_1$  y  $D_2$  a las partes tenemos que existe  $H_{D_1} : D_1 \times [0, 1] \rightarrow D_1$  una homotopía entre  $id_{D_1}$  y  $f|_{D_1}$  y  $H_{D_2} : D_2 \times [0, 1] \rightarrow D_2$  una homotopía entre  $id_{D_2}$  y  $f|_{D_2}$  y por lo tanto podemos crear una homotopía

$$H : S_2 \times [0, 1] \rightarrow S_2 \text{ tal que}$$

$$H(x, t) = \begin{cases} H_{D_1}(x, t) & \text{si } x \in D_1 \\ H_{D_2}(x, t) & \text{si } x \in D_2 \end{cases}$$

Que es una homotopía entre  $id_{S_2}$  y  $f$  de nuevo, por lo que homotopía coincide con isotopía en dimensión 2, tenemos que hay isotopía entre  $id_{S_2}$  y  $f$  y por lo tanto  $\text{Mod}(S_2)$  es trivial.  $\square$

#### 2.1.4. Toro ( $S_{1,0} \circ S_1 \times S_1$ )

**Teorema 2.1.** *El grupo modular del Toro es isomorfo a  $SL(2, \mathbb{Z})$*

**Teorema 2.2.** *Sean  $(a, b)$  base de  $H_1(S_1 \times S_1; \mathbb{Z})$  definidos así  $a := [S_1 \times \{1\}]$  y  $b := [\{1\} \times S_1]$  con  $T^2 \simeq S_1 \times S_1$*

*Entonces el mapa:*

$$\phi : \text{Mod}(S_1 \times S_1) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$$

*que envía la clase de isotopía de  $[f]$  a la matriz de  $f_* : H_1(S_1 \times S_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_1 \times S_1; \mathbb{Z})$  relativa a la base  $(a, b)$  es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Mostremos primero que  $\phi : \text{Mod}(S_1 \times S_1) \rightarrow GL(2, \mathbb{Z})$  es un homomorfismo de grupos.

- Sea  $[id] \in \text{Mod}(S_1 \times S_1)$  luego,  $\phi([id]) = id_* : H_1(S_1 \times S_1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_1 \times S_1; \mathbb{Z})$  nos da que  $id_*(a) = a$  y  $id_*(b) = b$  tenemos entonces  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  que es la matriz relativa a la base  $(a, b)$  y que es la identidad de  $GL(2, \mathbb{Z})$
- Sea  $[f], [g] \in \text{Mod}(S_1 \times S_1)$ , queremos ver si  $\phi([f \circ g]) = \phi(f)\phi(g)$ .

$$\begin{aligned} \phi([f \circ g]) &= (f \circ g)_* \\ &= f_* g_* \\ &= \phi([f])\phi([g]) \end{aligned}$$

Entonces  $\phi$  es un homeomorfismo. Para mirar que  $\phi$  toma valores en  $SL(2, \mathbb{Z})$  miremos lo siguiente

$$\forall [f] \in \text{Mod}(S_1 \times S_1) \quad \phi([f]) = \begin{pmatrix} i(f_*(a), b) & i(f_*(b), a) \\ -i(f_*(a), a) & -i(f_*(b), b) \end{pmatrix}$$

Esta matriz también se puede ver de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} f_*(a) \star b & f_*(b) \star b \\ -f_*(a) \star a & -f_*(b) \star a \end{pmatrix}$$

donde  $\star : H_1(S_1 \times S_1, \mathbb{Z}) \times H_1(S_1 \times S_1, \mathbb{Z})$  es otra forma de denotar el número de intersección. Como  $f$  preserva la orientación, también preserva el número de intersección. Por lo tanto, tenemos:

$$\det(\phi([f])) = (f_*(b) \star b)(f_*(a) \star a) - (f_*(a) \star b)(f_*(b) \star a) = f_*(a) \star f_*(b) = a \star b = 1$$

**Sobreyectividad:** Podemos pensar a  $S_1 \times S_1$  como  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  y de tal forma que podamos identificar a  $a$  con  $[0; 1] \times 0$  y a  $b$  con  $0 \times [0; 1]$ . Toda matriz  $T \in SL(2, \mathbb{Z})$  define un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que deja invariante a  $\mathbb{Z}^2$  globalmente, ya que si  $T = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  y  $z = [m, n]$  tenemos que  $T(z) = [pm + qn, rm + sn] \in \mathbb{Z}^2$ , y por ende induce un homeomorfismo (que preserva orientación)  $t : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  y por la construcción de esta  $t$  se puede ver que  $\phi([t]) = T$ .

**Inyectividad** Sea  $f : S_1 \times S_1 \rightarrow S_1 \times S_1$  tal que  $\phi([f])$  es trivial. Como  $\pi_1(S_1 \times S_1)$  es abeliano, esto implica que  $f$  actúa trivialmente al nivel del grupo fundamental. La proyección canónica  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  da la cubierta universal de  $S_1 \times S_1$ , por lo tanto,  $f$  se puede levantar a un único homeomorfismo  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\tilde{f}(0) = 0$  y, por los supuestos sobre  $f$ ,  $\tilde{f}$  es  $\mathbb{Z}^2$ -equivariante.

Entonces la homotopía afín

$$H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\vec{x}, t) \mapsto t\tilde{f}(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}$$

es una homotopía entre  $id_{\mathbb{R}^2}$  y  $\tilde{f}$  que además es equivariante con respecto a  $\mathbb{Z}^2$  ya que dado  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} H(\vec{x} + \vec{n}, t) &= t\tilde{f}(\vec{x} + \vec{n}) + (1-t)(\vec{x} + \vec{n}) \\ &= t(\tilde{f}(\vec{x}) + \vec{n}) + (1-t)\vec{x} + (1-t)\vec{n} \\ &= t\tilde{f}(\vec{x}) + t\vec{n} + (1-t)\vec{x} + (1-t)\vec{n} \\ &= t\tilde{f}(\vec{x}) + (1-t)\vec{x} + \vec{n} \\ &= H(\vec{x}, t) + \vec{n} \end{aligned}$$

Entonces, esta homotopía desciende a una homotopía entre  $Id_{S_1 \times S_1}$  y  $f$ . Como en dimensión 2, homotopía coincide con isotopía, podemos concluir que  $[f] = 1 \in \text{Mod}(S_1 \times S_1)$   $\square$

Ya que sabemos que  $\text{Mod}(S_1 \times S_1) \simeq SL(2, \mathbb{Z})$ , estudiemos a este último para poder conocer mejor al primero.  $SL(2, \mathbb{Z})$  es un grupo bajo la multiplicación de matrices. Miremos que:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

generan  $SL(2, \mathbb{Z})$ . La matriz  $T$  tiene orden infinito ( $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ), la matriz  $S$  tiene orden 4 ( $S^2 = -I_2$ ) y  $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  tiene orden 6.



Ahora, el efecto que tienen estas dos matrices por multiplicación a la izquierda en los elementos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  es:

$$T^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Dado  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  con el teorema de la división euclidiana en  $\mathbb{Z}$  demostraremos que  $A$  es producto de  $S$  y  $T$ . Suponga que  $c \neq 0$  ya que si  $c = 0$  tendríamos que  $a = 1, d = 1$  y entonces  $A = T^b$ . Si  $|a| > |c|$  se puede escribir  $a = cq + r$  con  $0 \leq r < |c|$  entonces  $T^{-q}A$  tiene en la entrada superior izquierda  $a - qc = r$  que es menor en valor absoluto que  $c$ . Aplicando  $S$ , se cambian esas entradas (con un cambio de signo) y se puede aplicar de nuevo el teorema de la división siempre y cuando  $r \neq 0$ . Eventualmente, con la multiplicación a la izquierda de  $A$  por suficientes copias de  $S$  y potencias de  $T$ , se llega a una matriz con la entrada inferior izquierda igual a 0. Esta matriz está formada por enteros y tiene determinante 1, por lo tanto debe tener la forma  $\begin{pmatrix} \pm 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^m$  ó  $T^{-m}$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Por consiguiente,  $GA = \pm T^n$  para un  $n \in \mathbb{Z}$  y como  $T^n \in SL(2, \mathbb{Z})$  y  $-I_2 = S_2$ , tenemos que  $A = \pm G^{-1}T^n \in SL(2, \mathbb{Z})$ . [2]

Y tenemos una presentación

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^4, (ST)^6 \rangle$$

Ahora, volvamos al toro  $(S_1 \times S_1)$  con  $a := [S_1 \times \{1\}]$  y  $b := [\{1\} \times S_1]$  base de  $H_1(S_1 \times S_1, \mathbb{Z})$  y estudiemos las transformaciones  $[\tau_a]$  y  $[\tau_b]$  (Ver sección 3) para  $a$  y  $b$  representantes de las respectivas clases, queremos ver las imágenes de estas clases bajo el homeomorfismo  $\phi$ .

$$\phi([\tau_a]) = \begin{pmatrix} \tau_{a*}(a) \star b & \tau_{a*}(b) \star b \\ -\tau_{a*}(a) \star a & -\tau_{a*}(b) \star a \end{pmatrix}, \quad \phi([\tau_b]) = \begin{pmatrix} \tau_{b*}(a) \star b & \tau_{b*}(b) \star b \\ -\tau_{b*}(a) \star a & -\tau_{b*}(b) \star a \end{pmatrix}$$

teniendo que  $a \star b = 1$ , podemos calcular los coeficientes dado que:

- $\tau_{a*}(a) \sim a$
- $\tau_{a*}(b) \sim b - a$
- $\tau_{b*}(a) \sim a + b$
- $\tau_{b*}(b) \sim b$

donde la notación de suma, hace referencia a la curva con orientación creada por  $a$  y  $b$ .

Con esto, las matrices correspondientes :

$$\phi([\tau_a]) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi([\tau_b]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

note que  $\phi([\tau_a]) = T^{-1}$  y que:

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= TS^{-1}T \end{aligned}$$

entonces  $U = T^{-1}ST^{-1}$  ó  $S = TUT$  y al mismo tiempo tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = UTU \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= S \end{aligned}$$

por lo que tenemos que  $UTU = TUT$  y como  $TUT = S$  entonces  $TUT$  tiene orden 4. También como  $ST = (UTU)T$ , entonces  $UTUT$  tiene orden 6

$$\begin{aligned} (UTUT)^6 &= (UTUT)(UTUT)(UTUT)(UTUT)(UTUT)(UTUT) \\ &= (UTUTUTUTUTUTUTUTUTUTUTUTUTUTUT) \\ &= TUTTUTTUTTUTTUTTUTTUTTUTTUT \\ &= (TUT)^8 \\ &= I_2 \end{aligned}$$

Por lo que la segunda condición de la presentación anterior sobra con estas dos nuevas matrices. Y por lo tanto se tiene la siguiente presentación:

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, U \mid TUT = UTU, (TUT)^4 = I \rangle$$

y para probar que estas dos representaciones son del mismo grupo, miremos que

si  $U = T^{-1}ST^{-1}$

$$T^{-1}ST^{-1}TT^{-1}ST^{-1} = TT^{-1}ST^{-1}T$$

$$T^{-1}ST^{-1}ST^{-1} = S$$

$$ST^{-1}S = TST$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

También  $(UTU)^4 = (T^{-1}ST^{-1}TT^{-1}ST^{-1})^4 = (T^{-1}ST^{-1}ST^{-1})^4 = S^4 = I$ .

Por lo tanto, estas dos presentaciones son presentaciones del mismo grupo, y la última da una descripción de  $\text{Mod}(S_1 \times S_1)$ , partiendo de las curvas que definen  $a$  y  $b$  sobre la superficie.

## 2.2. Superficies con puntos marcados

### 2.2.1. Disco con un punto marcado

**Proposición 2.4.** *El grupo modular del disco con un punto marcado es trivial*

*Demostración.* Se puede asumir, que el punto marcado es el 0 dado que podemos hacer una traslación de cualquier punto al cero mediante la siguiente aplicación  $T(t) = (1-t)x$   $x \in D^2$  y componer la homotopía con esta traslación. Con lo anterior, podemos de nuevo emplear el “truco de Alexander” ya que si tenemos una clase  $[f] \in \text{Mod}(D_0^2)$  tal que  $\forall f \in [f], f(0) = 0$ , la homotopía:  $f_t(x) : D_0^2 \rightarrow D_0^2$  tal que

$$f_t(x) = \begin{cases} tf\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \leq |x| < t \\ x & t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

$f_0$  es la identidad de  $D^2$ . Entonces  $\forall t \in [0, 1], f_t$  es un homeomorfismo y  $f_t(0) = 0$ , por lo que como resultado tenemos una homotopía entre  $f$  y la identidad que fija al 0  $\square$

### 2.2.2. Esfera con un punto marcado $(S_{0,1})$

**Proposición 2.5.** *El grupo modular de la esfera con un punto marcado  $(\text{Mod}(S_{0,1}))$  es trivial.*

*Demostración.* La esfera sin un punto se puede identificar con  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, podemos estudiar este último.

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homeomorfismo que preserve la orientación, ahora sea

$H : \mathbb{R}^2 \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, t) \mapsto tf(x) + (1 - t)x$ . Entonces,  $H$  es una homotopía entre  $f$  y la identidad. Por lo tanto,  $\text{Mod}(S_{0,1})$  es trivial.  $\square$

### 2.2.3. Esfera con 2 puntos marcados ( $S_{0,2}$ )

**Proposición 2.6.** *El grupo modular de la esfera con 2 puntos marcados ( $\text{Mod}(S_{0,2})$ ) es isomorfo a  $\Sigma_2$  que es el grupo de permutaciones de dos elementos. Es decir, la aplicación*

$$\sigma : \text{Mod}(S_{0,2}) \rightarrow \Sigma_2$$

dado por la acción de  $\text{Mod}(S_{0,2})$  en los puntos marcados es un isomorfismo.

*Demostración.* La esfera se puede pensar como la compactificación de  $\mathbb{C}$  que tiene 2 puntos marcados y mirar transformaciones que dejen esos puntos fijos, entonces sean  $a, b, a \neq b$  los puntos marcados en  $S_{0,2}$ . Si tenemos que  $\Sigma_2 = \{id, (ab)\}$  queremos encontrar transformaciones que hagan esto en  $S_{0,2}$ . Para el primer elemento de  $\Sigma_2$  tome la transformación  $id$  que a  $z \mapsto z$ . Esta transformación tiene la acción requerida en los puntos y  $[id] \in \text{Mod}(S_{0,2})$ . Para el otro caso, veamos que sólo es necesario saber la transformación  $T$  para  $\{0, 1\}$  que sería la dada por  $z \mapsto 1 - z$  ya que bajo la transformación  $L$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{a-z}{a-b} & \text{si } a, b \neq \infty \\ \frac{1-b}{1-z} & \text{si } a = \infty, b \in \mathbb{C} \end{cases}$$

podemos enviar dos puntos cualesquiera distintos a  $\{0, 1\}$  y la transformación sería  $L^{-1} \circ T \circ L$  que manda a  $a$  en  $b$  y a  $b$  en  $a$ .  $L^{-1} \circ T \circ L$  es homeomorfismo que preserva la orientación porque es la composición de elementos de  $\text{Homeo}^+(S_{0,2})$  que es grupo bajo composición. Por lo tanto  $[L^{-1} \circ T \circ L] \in \text{Mod}(S_{0,2})$

Falta probar que si  $f$  fija a  $a, b$  entonces  $f$  es homótopa a la identidad. Sea  $\gamma$  un arco entre  $a$  y  $b$  entonces  $f(\gamma)$  deja fijos los extremos del arco, entonces  $f(\gamma)$  es homotópico a  $\gamma$  por lo tanto podemos decir que  $f$  fija puntualmente a  $\gamma$ . Por lo tanto, podemos cortar a  $S_{0,2}$  a lo largo de  $\gamma$  y obtenemos un disco. Al mismo tiempo  $f$  induce una función  $\tilde{f} : D^2 \rightarrow D^2 : \tilde{f}|_{\partial D^2} = id$  ya que  $f$  fijaba el arco  $\gamma$  puntualmente. Por ende  $\tilde{f}$  es homótopa a la  $id$  y así obtenemos que  $f$  es homotópico a la identidad.

Entonces tenemos que  $\sigma$  es isomorfismo.  $\square$

### 2.2.4. Esfera con 3 puntos marcados ( $S_{0,3}$ )

**Proposición 2.7.** *El grupo modular de la esfera con 3 puntos marcados  $\text{Mod}(S_{0,3})$  es isomorfo a  $\Sigma_3$  que es el grupo de permutaciones de tres elementos. Es decir, el mapa*

$$\sigma : \text{Mod}(S_{0,3}) \rightarrow \Sigma_3$$

dado por la acción de  $\text{Mod}(S_{0,3})$  en los puntos marcados es un isomorfismo.

Antes de pasar a la demostración, un resultado necesario:

**Proposición 2.8.** *Cualesquiera dos arcos propios simples esenciales en  $S_{0,3}$  con los mismos extremos son isotópos. Cualquiera 2 arcos esenciales que comiencen y terminen en los mismos puntos marcados de  $S_{0,3}$  son isotópos.*

*Demostración.* Sean  $\alpha, \beta$  dos arcos simples propios de  $S_{0,3}$  conectando los mismos puntos marcados. Podemos modificar  $\alpha$  via isotopía para que esté en posición general de intersección con  $\beta$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  no son disyuntos, podemos hallar un disco encajado que esté acotado por un arco de  $\alpha$  y un arco de  $\beta$  y moviendo  $\alpha$  por isotopía podemos reducir esa intersección hasta que  $\alpha, \beta$  tengan interior disyunto. En ese momento, se puede cortar a  $S_{0,3}$  por  $\alpha \cap \beta$  y al hacer esto, por el teorema de clasificación de superficies, obtenemos dos discos. Ambos con 2 puntos marcados en la frontera y sólo uno con un punto marcado en el interior. Entonces  $\alpha$  y  $\beta$  están en la frontera de un disco encajado en  $S_{0,3}$  y por los ejemplos sobre los discos, son isotópos  $\square$

**Prop. 2.7.** La esfera se puede pensar como la compactificación de  $\mathbb{C}$  que tiene 3 puntos marcados y mirar transformaciones que dejen esos puntos fijos, entonces sean  $a, b, c$  distintos dos a dos, los puntos marcados en  $S_{0,3}$ . Si tenemos que  $\Sigma_3 = \langle (bc), (ac) \rangle$  queremos encontrar transformaciones que representen esto en  $S_{0,3}$ . Al igual que en el ejemplo anterior, se pueden mirar las transformaciones sobre un grupo especial de puntos, en este caso  $\{0, 1, \infty\}$  ya que dados  $\{a, b, c\}$  podemos hacer la transformación  $L$  tal que

$$z \mapsto \frac{(a-z)(c-b)}{(a-b)(c-z)}$$

y con esto podemos definir la transformación  $T$  tal que  $z \mapsto \frac{1}{z}$  y  $S$  tal que  $z \mapsto \frac{z}{z-1}$  y de esta forma, tenemos las transformaciones  $L^{-1} \circ T \circ L$  y  $L^{-1} \circ S \circ L$  que son representantes de las mismas clases de equivalencia respectivamente.

De nuevo, falta probar que si  $\phi$  es un homeomorfismo de  $S_{0,3}$  que fija los puntos puntualmente, entonces  $\phi$  es homotópico a la identidad. Sea  $\alpha$  un arco en  $S_{0,3}$  con extremos distintos  $a, b$ . Como  $\phi$  fija a  $a, b, c$  entonces los extremos de  $\phi(\alpha)$  son  $a, b$  y por la proposición anterior  $\phi(\alpha)$  es isotopo a  $\alpha$  entonces  $\phi$  es homotópico a un mapa  $\phi$  que fija a  $\alpha$  puntualmente, por lo tanto podemos cortar a  $S_{0,3}$  a lo largo de  $\alpha$  y se obtiene a un disco con un punto marcado  $c$ .  $\phi$  induce un homeomorfismo  $\tilde{\phi}$  del disco, fija a  $c$  y es la identidad en la frontera. Como  $\text{Mod}(D_0^2)$  es trivial entonces  $\tilde{\phi}$  es homotópico a la identidad, por lo tanto  $\phi$  es homotópico a la identidad. Por ende  $\sigma$  es isomorfismo.  $\square$

### 2.2.5. Esfera con 4 puntos marcados ( $S_{0,4}$ )

**Proposición 2.9.** *EL grupo modular de la esfera con cuatro puntos marcados,  $\text{Mod}(S_{0,4}) \simeq PSL(2, \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$*

*Demostración.* La idea es construir un homomorfismo  $\bar{\sigma} : \text{Mod}(S_{0,4}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$  junto a un inverso por la derecha, luego mostrar que el kernel es isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Sea  $\phi \in [f] \in \text{Mod}(S_{0,4})$ . Hay dos levantamientos de  $\phi$  a  $\text{Homeo}^+(S_1 \times S_1)$ , llámelos  $\tilde{\phi}, \iota\tilde{\phi}$ . Defina  $\bar{\sigma}(f)$  como el elemento de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  representado por la matriz  $\sigma([\tilde{\phi}])$  donde  $\sigma : \text{Mod}(S_1 \times S_1) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$  es el homomorfismo estudiado en el ejemplo del Toro. Está bien definido ya que dos levantamientos de  $\phi$  difieren en  $\iota$ , y  $\sigma(\iota) = -I$ .

Ahora la inversa por derecha: Un elemento de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  induce un homeomorfismo de  $S_1 \times S_1$  que preserva orientación y que es bien definido bajo multiplicación por  $\iota$ . Cualquiera de esas aplicaciones de  $S_1 \times S_1$  conmuta con  $\iota$  e induce un homeomorfismo que preserva la orientación de  $S_{0,4}$ . Así, definimos una sección  $s : PSL(2\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(S_{0,4})$

Los homeomorfismos de orden 2 de  $S_{0,4}$  son las involuciones hiper-elípticas  $(\iota_1, \iota_2)$  de  $S_{0,4}$ . Las clases de  $\iota_1$  y  $\iota_2$  generan un subgrupo de  $\text{Mod}(S_{0,4})$  isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Estas involuciones hiperelípticas cada una se levanta a un homeomorfismo de  $S_1 \times S_1$  que rota cada uno de los factores por  $\pi$ : Por lo tanto,  $\langle \iota_1, \iota_2 \rangle$  está contenido en el kernel de  $\bar{\sigma}$ . Ahora queremos ver que  $\langle \iota_1, \iota_2 \rangle$  es efectivamente el kernel de  $\bar{\sigma}$ . Sea  $f \in \ker(\bar{\sigma})$ . Por la definición de  $\bar{\sigma}$  cualquier levantamiento de un representante de  $f$  a  $\text{Homeo}^+(S_1 \times S_1)$  actúa por  $\pm I$  sobre  $H_1(S_1 \times S_1, \mathbb{Z})$  y por ende actúa trivialmente en el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas simples en  $S_1 \times S_1$  y, por un resultado que dice que las involuciones hiper-elípticas inducen una biyección entre el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas esenciales simples en  $S_1 \times S_1$  y las clases de homotopía de curvas cerradas esenciales simples en  $S_{0,4}$  [4] tenemos por lo tanto que  $f$  actúa trivialmente en el conjunto de curvas cerradas simples de  $S_{0,4}$ , en particular,  $f$  fija las clases de homotopía de  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$  que vienen de las curvas de  $S_1 \times S_1$ . De lo anterior se sigue que se puede componer a  $f$  con un elemento  $k \in \langle \iota_1, \iota_2 \rangle$  tal que  $fk$  fija los cuatro puntos marcados de  $S_{0,4}$ . Ahora, toca ver que  $fk$  es la identidad. Suponga que  $fk$  es representado por el homeomorfismo  $\phi$  que puede ser modificado para que fije a  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$ . En este punto, se puede cortar a lo largo de  $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$  y obtener así cuatro discos con un punto marcado cada uno, ya que  $\phi$  fija los cuatro puntos marcados y usando de nuevo el Truco de Alexander, 4 veces, se tiene que  $fk$  es la identidad. Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$e \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod}(S_{0,4}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow e$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\text{Mod}(S_{0,4}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes PSL(2, \mathbb{Z})$$

□

### 2.2.6. Toro con un punto marcado $(S_{1,1})$

**Proposición 2.10.** *El grupo modular del toro con un punto marcado  $\text{Mod}(S_{1,1})$  es isomorfo a  $SL(2, \mathbb{Z})$ .*

*Demostración.* Para esta superficie tenemos que  $H_1(S_{1,1}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(T^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$  por lo tanto, como en el caso de  $S_1 \times S_1$ , hay un homomorfismo  $\sigma : \text{Mod}(S_{1,1}) \rightarrow$

$SL(2, \mathbb{Z})$ . Este mapa es sobreyectivo ya que dado cualquier elemento de  $SL(2, \mathbb{Z})$  puede ser visto como un mapa de  $\mathbb{R}^2$  que es equivariante con respecto a  $\mathbb{Z}^2$  y que fija el origen. Por lo tanto, se puede ver como una aplicación de  $S_{1,1}$ . Para probar la inyectividad, sean  $\alpha$  y  $\beta$  curvas simples cerradas en  $S_{1,1}$  que se intersequen en un punto. Si  $f \in \ker(\sigma)$  es representado por  $\phi$  entonces  $\phi(\alpha)$  y  $\phi(\beta)$  son isótopos a  $\alpha$  y  $\beta$  y podemos modificar a  $\phi$  para que fije a  $\alpha$  y  $\beta$  puntualmente. Si se corta a  $S_{1,1}$  a lo largo de  $\alpha \cup \beta$  obtenemos un disco con un punto marcado y  $\phi$  induce un homeomorfismo que fija la frontera y al punto, que por el truco de Alexander, es homotópico a la identidad, por ende,  $\phi$  es homotópico a la identidad.  $\square$

### 3. Twists de Dehn

Considere  $A = S_1 \times I$ . Para orientar a  $A$ , se puede encajar a  $A$  en el plano  $(\theta, t)$  con el mapa  $(\theta, t) \mapsto (\theta, t + 1)$  para así tomar la orientación del plano. Sea

$$T : A \rightarrow A : (\theta, t) \mapsto (\theta + 2t\pi, t)$$

Note que  $T$  fija puntualmente a  $\partial A$ . Ahora, sea  $S$  una superficie arbitraria (orientada) y sea  $\alpha$  una curva cerrada simple en  $S$ , sea  $N$  una vecindad regular [3] de  $\alpha$  y tome un homomorfismo que preserve orientación  $\phi : A \rightarrow N$  y con esta se crea  $\tau_\alpha : S \rightarrow S$  llamado el **Twist de Dehn** alrededor de  $\alpha$  tal que:

$$\tau_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in S \setminus N \end{cases}$$

$\tau_\alpha$  depende de  $N$  y  $\phi$ , sin embargo por la unicidad de vecindades regulares [3] la clase de isotopía de  $\tau_\alpha$  no depende de esas elecciones. Aún más  $\tau_\alpha$  no depende de la elección de  $\alpha$  sino tan sólo de su clase de isotopía, luego si  $a = [\alpha]$  entonces  $\tau_a$  está bien definido como un elemento de  $\text{Mod}(S)$ .

Se puede imaginar a los twist de Dehn actuando sobre una superficie de la siguiente forma:

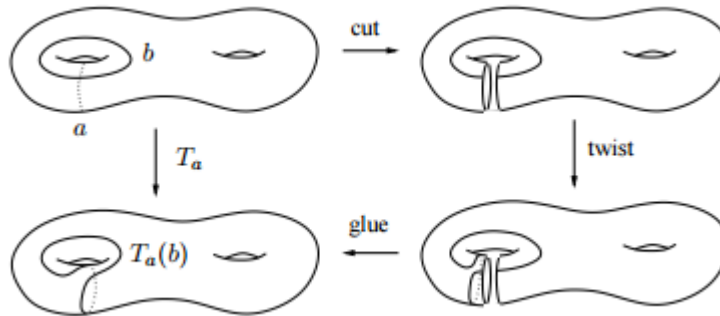


Figura 2: Acción de twist de Dehn en superficie (Sobre curva b)

### 3.1. Propiedades de los Twists de Dehn

Ahora, vamos a hablar de estos elementos que juegan un rol muy importante en la comprensión del grupo modular.

#### 3.1.1. No trivialidad

Dada una superficie  $S$ , sea  $a = [\alpha]$  con  $\alpha$  una curva cerrada simple (c.c.s.) que es isotopa a un punto, entonces  $\tau_a$  es trivial en  $\text{Mod}(S)$ . Podemos usar la acción del twist de Dehn sobre curvas simples cerradas para probar que los otros twist de Dehn son no triviales.

**Proposición 3.1.** [4, Prop. 3.1] *Sea  $a$  la clase de isotopía de una c.c.s.  $\alpha$  en una superficie  $S$ . Si  $\alpha$  no es homótota a un punto o punto marcado de  $S$  entonces el twist de Dehn  $\tau_a$  es un elemento no trivial de  $\text{Mod}(S)$ .*

#### 3.1.2. Hechos básicos

En esta sección, se mirarán algunos hechos o propiedades de los twists de Dehn.

**Proposición 3.2.** [4, Prop. 3.2] *Si  $a, b$  son las clases de isotopía arbitraria de curvas esenciales simples cerradas en una superficie y  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces tenemos*

$$i(\tau_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2$$

De la anterior proposición se puede derivar una consecuencia importante y es que: *Los twist de Dehn tienen orden infinito*

**Proposición 3.3.**  $\tau_a = \tau_b \Leftrightarrow a = b$

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Como el twist de Dehn está bien definido, este resultado se tiene.

( $\Rightarrow$ ) Asuma que  $a \neq b$  y mostremos que  $\tau_a \neq \tau_b$ . La idea es buscar una clase de isotopía  $c$  de curvas cerradas simples tal que  $i(a, c) = 0$  y  $i(b, c) \neq 0$ . 2 casos.

- Caso 1:  $i(a, b) \neq 0$  luego podemos tomar  $c = a$
- Caso 2:  $i(a, b) = 0$  entonces se puede usar un cambio de coordenadas para hallar  $c$

Ahora, teniendo a  $c$ , se puede aplicar la proposición anterior ya que:

$$i(\tau_a(c), c) = i(a, c)^2 = 0 \neq i(b, c) = i(\tau_b(c), c)$$

y por lo tanto  $\tau_a(c) \neq \tau_b(c)$  y tenemos que  $\tau_a \neq \tau_b$  □

**Proposición 3.4.** *Para cualquier  $f \in \text{Mod}(S)$  y cualquier clase de isotopía  $a$  de curvas cerradas simples en  $S$ , tenemos que  $\tau_{f(a)} = f\tau_a f^{-1}$*



*Demostración.* Sea  $\phi$  un representante de  $[f]$  y  $\alpha$  representante de  $a$ . Sea  $\psi_\alpha$  representante de  $\tau_\alpha$  cuyo soporte es un anillo.

$\phi^{-1}$  envía una vecindad regular de  $\phi(\alpha)$  en una vecindad regular de  $\alpha$  (y que preserva orientación), luego  $\psi_\alpha$  realiza un twist a la vecindad de  $\alpha$  y después  $\phi$  toma esta vecindad transformada de  $\alpha$  para enviarla a una vecindad de  $\phi(\alpha)$  (de nuevo preservando la orientación).

El resultado es que se tiene un Twist de Dehn alrededor de  $\phi(\alpha)$  □

**Proposición 3.5.** *Para  $[f] \in \text{Mod}(S)$  y una clase de isotopía  $a$  de curvas cerradas simples en  $S$  tenemos que  $f$  conmuta con  $\tau_\alpha \Leftrightarrow f(a) = a$*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f\tau_a = \tau_a f &\Leftrightarrow f\tau_a f^{-1} = \tau_a \\ &\Leftrightarrow \tau_{f(a)} = \tau_a \\ &\Leftrightarrow f(a) = a \end{aligned}$$

□

Por la clasificación de c.c.s en  $S$  (1) dadas 2 curvas no separadoras  $a, b$ , existe  $h \in \text{Mod}(S)$  tal que  $h(a) = b$ . Este hecho anterior, también nos dice que si  $a, b$  son dos c.c.s no separadoras en  $S$ , entonces  $\tau_a, \tau_b$  son conjugados en  $\text{Mod}(S)$ .

### 3.1.3. Relaciones entre twists de Dehn

**Proposición 3.6** (Relación de trenza). *Si  $a, b$  son clases de isotopía de c.c.s con  $i(a, b) = 1$ , entonces  $\tau_a \tau_b \tau_a = \tau_b \tau_a \tau_b$*

Este hecho es equivalente a:

$$\begin{aligned} \tau_a \tau_b \tau_a = \tau_b \tau_a \tau_b &\Leftrightarrow (\tau_a \tau_b) \tau_a (\tau_a \tau_b)^{-1} = \tau_b \\ &\Leftrightarrow \tau_{\tau_a \tau_b(a)} = \tau_b \\ &\Leftrightarrow \tau_a \tau_b(a) = b \end{aligned}$$

**Proposición 3.7.** *Si  $a, b$  son clases de isotopía de c.c.s con  $i(a, b) = 1$ , entonces  $\tau_a \tau_b(a) = b$*

*Demostración.* La demostración viene ilustrada en el siguiente dibujo

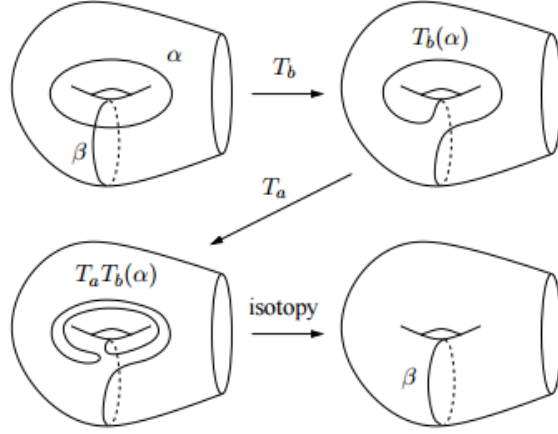


Figura 3: La relación de trenza [4]

□

**Proposición 3.8.** Si  $a, b$  son clases de isotopía de c.c.s y los twist de Dehn  $\tau_a, \tau_b$  satisfacen  $\tau_a \tau_b \tau_a = \tau_b \tau_a \tau_b$ . Entonces  $i(a, b) = 1$

*Demostración.* Por la relación de trenza, tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_a \tau_b(a) = b &\Rightarrow i(a, \tau_a \tau_b(a)) = i(a, b) \\ i(\tau_a^{-1}(a), \tau_b(a)) &= i(a, b) \\ i(a, \tau_b(a)) &= i(a, b) \end{aligned}$$

Y por la proposición 3.2

$$i(a, \tau_b(a)) = i(a, b)^2 = i(a, b) \Rightarrow i(a, b) \in \{0, 1\}$$

pero si  $i(a, b) = 0$  entonces  $\tau_b(a) = a$  por lo que  $\tau_a = \tau_b$  lo que diría que  $a = b$  y esto no puede ocurrir. Por lo tanto  $i(a, b) = 1$ . □

**Proposición 3.9 (El homomorfismo de tapado).** [4, Prop. 3.19] Sea  $S'$  la superficie obtenida de la superficie  $S$  tapando el componente de frontera de  $\beta$  ( $\beta \in b \in \text{Mod}(S)$ ) con un disco con un punto marcado. Llame al punto marcado  $p_0$ . Denote por  $\text{Mod}(S, \{p_1, \dots, p_k\})$  el subgrupo de  $\text{Mod}(S)$  que consiste de los elementos que fijan a los puntos  $p_1 \dots p_k$  donde  $k \geq 0$ . Sea  $\text{Mod}(S, \{p_0, \dots, p_k\})$  denote el subgrupo de  $\text{Mod}(S')$  que consiste de los elementos que fijan los puntos marcados  $p_0, \dots, p_k$  y sea  $\text{Cap} : \text{Mod}(S, \{p_1, \dots, p_k\}) \rightarrow \text{Mod}(S', \{p_0, \dots, p_k\})$  el homomorfismo inducido. Entonces tenemos la siguiente sucesión que es exacta:

$$1 \rightarrow \langle \tau_b \rangle \rightarrow \text{Mod}(S, \{p_1, \dots, p_k\}) \xrightarrow{\text{Cap}} \text{Mod}(S', \{p_0, \dots, p_k\}) \rightarrow 1$$

Esta proposición permite realizar el cálculo de algunas superficies con frontera.

Sea  $P$  un *par de pantalones*, es decir, una superficie compacta de genero 0 con 3 componentes de frontera y sin puntos marcados. por la proposición (2.7) tenemos que el  $\text{PMod}(S_{0,3}) = 1$  [Ver 3.2.2]. Empezando desde este hecho, y aplicando la proposición anterior tres veces, obtenemos un isomorfismo

$$\text{Mod}(P) \simeq \mathbb{Z}^3$$

Otro ejemplo en el que podemos usar esta proposición es el de la superficie  $S_1^1$  que es un toro menos un disco abierto. Mostraremos que

$$\text{Mod}(S_1^1) \simeq \widetilde{SL(2\mathbb{Z})}$$

donde  $\widetilde{SL(2\mathbb{Z})}$  es la extensión central de  $SL(2\mathbb{Z})$ . Para probar esto necesitaremos la presentación de  $SL(2, \mathbb{Z})$  que es

$$\langle a, b | abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, (ab)^6 \rangle$$

y la de  $\widetilde{SL(2\mathbb{Z})}$  que es

$$\langle a, b | abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$$

[4, pg. 92]. de estas presentaciones, podemos ver que existe una aplicación sobreyectiva  $\widetilde{SL(2\mathbb{Z})} \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$  mandando  $a$  en  $a$  y  $b$  en  $b$  con kernel  $\langle (ab)^6 \rangle \simeq \mathbb{Z}$ . También hay un homomorfismo  $\widetilde{SL(2\mathbb{Z})} \rightarrow \text{Mod}(S_1^1)$  y de  $SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(S_{1,1})$ , donde cada generador se envía a las curvas de latitud y longitud. Estos cuadros en el siguiente diagrama de sucesiones exactas, en las que cada cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{SL(2\mathbb{Z})} & \longrightarrow & SL(2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Mod}(S_1^1) & \xrightarrow{Cap} & \text{Mod}(S_{1,1}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

donde el isomorfismo de la mitad se sigue por el lema de los 5.

### 3.2. El teorema de Lickorish

Todo lo anterior, lleva a esta sección. En ésta se mirará que se puede generar todas las clases de isotopía de homeomorfismos de una superficie. Ya tenemos por ejemplo que el grupo modular del toro se puede generar por las transformaciones asociadas a las curvas explícitas dadas sobre esta. Antes de empezar definamos el **grupo modular puro**.

**Definición 3.1.** *El grupo  $\text{PMod}(S_{g,n})$  es el subgrupo de  $\text{Mod}(S_{g,n})$  de los homeomorfismos que fijan puntualmente a los puntos marcados.*

El objetivo final es probar

**Teorema 3.1.** *Sea  $S_g$  una superficie cerrada de género  $g \geq 1$  entonces  $\text{Mod}(S_g)$  es generado por  $3g - 1$  twist de Dehn asociados a ciertas clases de isotopía explícitamente dadas.*

Para poder llegar a probar este resultado, se necesitan varios resultados previos a desarrollar.

### 3.2.1. Complejo de Curvas

**Definición 3.2.** *El complejo de curvas  $\mathcal{C}(S)$  es un complejo simplicial asociado a la superficie  $S$ . Su 1-esqueleto viene dado por:*

- *Vertices: Un vértice por cada clase de isotopía de una c.c.s. esencial en  $S$ .*
- *Arista: Hay arista entre dos vértices de  $\mathcal{C}(S)$  correspondientes a las clases  $a$  y  $b$  con  $i(a, b) = 0$*

Por la definición dada, un punto marcado tiene el mismo efecto que un componente de frontera, ya que las curvas alrededor de estos son NO esenciales, por lo tanto, se consideraran las superficies con puntos marcados nada más.

**Teorema 3.2.** *[4] Si  $3g + n \geq 5$  entonces  $\mathcal{C}(S_{g,n})$  es conexo.*

**Definición 3.3.** *Sea  $\mathcal{N}(S)$  el subcomplejo de  $\mathcal{C}(S)$  generado por los vértices correspondientes a c.c.s. no-separadoras*

**Teorema 3.3.** *[4] Si  $g \geq 2$  entonces  $\mathcal{N}(S_{g,n})$  es conexo.*

El complejo de curvas sobre el que vamos a trabajar es el complejo de curvas no separadoras modificado que se define de la siguiente forma:

**Definición 3.4.** *Sea  $\widehat{\mathcal{N}}(S)$  el complejo simplicial 1-dimensional cuyos vértices son la clases de isotopía de c.c.s. no separadoras en la superficie  $S$  y las aristas corresponden a pares de clases  $a, b$  con  $i(a, b) = 1$*

**Lema 3.1.** *Si  $g \geq 2, n \geq 0$  entonces el complejo  $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$  es conexo.*

*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  dos clases de isotopía de curvas cerradas simples en  $S_{g,n}$ . Por el teorema (3.3) tenemos que existe una sucesión de clases de isotopía  $a = c_1, c_2, \dots, c_k = b$  representando los vértices de  $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$  y además  $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ . Por el principio de cambios de coordenadas, podemos encontrar curvas no separadoras  $d_i$  de tal forma que  $i(c_i, d_i) = i(d_i, c_{i+1}) = 1$  por lo que tenemos sucesión  $a = c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_{k-1}, d_{k-1}, c_k = b$  con la propiedad que queríamos, por lo que tenemos que la sucesión está en  $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,n})$ .  $\square$

### 3.2.2. Sucesión exacta de Birman

**Teorema 3.4 (Sucesión exacta de Birman).** *Sea  $S_{g,n}$  una superficie con  $\chi(S) < 0$  posiblemente con puntos marcados y frontera. Sea  $S_{g,n}^*$  la superficie obtenida de  $S_{g,n}$  mediante la marcación de un punto  $x$  en el interior de  $S_{g,n}$ . Entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}, x) \xrightarrow{Push} \text{Mod}(S_{g,n}^*) \xrightarrow{Forget} \text{Mod}(S_{g,n}) \rightarrow 1$$

*Demostración.* Para probar la existencia de la sucesión, vamos a mirar que hay una fibración

$$\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n}, x) \rightarrow \text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n}) \xrightarrow{\varepsilon} S_{g,n}$$

con espacio total  $\text{Homeo}^+(S_{n,g})$  y con espacio base  $S_{g,n}$  y con fibra el subgrupo de  $\text{Homeo}^+(S_{n,g})$  que consiste de los elementos que fijan a  $x$ . La aplicación  $\varepsilon$  es la evaluación en  $x$ .

Miremos que  $\varepsilon : \text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n}) \rightarrow S_{n,g}$  es una fibración, eso quiere decir que  $\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n})$  es localmente homeomorfo al producto de un abierto  $U$  de  $S_{g,n}$  con  $\text{Homeo}^+(S_{g,n}, x)$  por lo tanto, la restricción de  $\varepsilon$  es la proyección del primer factor. Sea  $U$  una vecindad abierta de  $x$  en  $S_{n,g}$  que sea homeomorfa a un disco. Dado  $u \in U$  podemos elegir un  $\phi_u \in \text{Homeo}^+(U)$  tal que  $\phi_u(x) = u$  y que  $\phi_u$  varíe continuamente como función de  $u$  [Piense en el grupo  $SU(1, 1)$  en  $\mathbb{C}$  cuyos elementos son las matrices que tienen la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  y que cumplen  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ ]. Se tiene entonces un homeomorfismo de  $U \times \text{Homeo}^+(S_{g,n}, x) \rightarrow \varepsilon^{-1}(U)$  dado por

$$(u, \psi) \mapsto \phi_u \circ \psi$$

y cuyo inverso viene dado por

$$\psi \mapsto (\psi(x), \phi_{\psi}^{-1}(x) \circ \psi)$$

Para cualquier otro punto  $y \in S$  se puede escoger homeomorfismo  $\xi$  de  $S$  que envía  $x$  a  $y$ , luego hay un homeomorfismo  $\varepsilon^{-1}(U) \rightarrow \varepsilon^{-1}(\xi(U))$  dado por  $\psi \mapsto \xi \circ \psi$  que verificaría la propiedad de la fibración.

El teorema se sigue de la sucesión larga exacta de grupos de homotopía asociada a la fibración anterior. La parte que nos interesa es la siguiente:

$$\cdots \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n})) \rightarrow \pi_1(S_{g,n}) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n}, x)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n})) \rightarrow \pi_0(S_{g,n}) \rightarrow \cdots$$

Y se tiene que  $\pi_1(\text{Homeo}_{\partial}^+(S_{g,n}))$  es trivial [4, Teo. 1.14] y también se tiene que  $\pi_0(S)$  es trivial. Lo que queda coincide con lo que se quería encontrar en la sucesión y por lo tanto las aplicaciones *Push* y *Forget* son las definidas por esta sucesión.  $\square$

Miremos que la sucesión exacta de Birman también aplica para el subgrupo  $\text{PMod}(S_{g,n})$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & 1 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \pi_1(S_{g,n}^*) & \xrightarrow{=} & \pi_1(S_{g,n}^*) & & \\
& & \downarrow s & & \downarrow Push & & \\
1 & \longrightarrow & PMod(S_{g,n}^*) & \xrightarrow{f_1} & Mod(S_{g,n}^*) & \xrightarrow{g_1} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow t & & \downarrow Forget & & \downarrow = \\
1 & \longrightarrow & PMod(S_{g,n}) & \xrightarrow{f} & Mod(S_{g,n}) & \xrightarrow{g} & \Sigma_n \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 1 & & 1 & & 
\end{array}$$

Queremos ver que la sucesión que involucra a  $PMod(S_{g,n})$  es exacta, sabiendo que el resto son exactas.

- Sea  $a \in Ker(t)$  por  $t(a) = 0$  y porque el diagrama conmuta, tenemos que  $f \circ t = Forget \circ f_1$  por lo tanto, tenemos  $f(0) = 0 = Forget \circ f_1(a)$  lo que implica que  $f_1(a) \in ker(Forget) = Im(Push)$  por lo que existe un elemento  $\alpha \in \pi_1(S_{g,n}^*)$  tal que  $Push(\alpha) = f_1(a)$  y por la igualdad del diagrama arriba, junto con la conmutatividad, tenemos que  $s(\alpha) = a$  entonces  $Ker(t) \subset Im(s)$
- Sea  $b \in Im(S)$ , sabemos que hay un  $b' \in \pi_1(S_{g,n}^*)$  tal que  $s(b') = b$  y por conmutatividad, tenemos que  $f_1 \circ s = Push$ , por lo que al aplicar  $Forget$ , llegamos, por la exactitud de la sucesión, al 0 en  $Mod(S_{g,n})$  y como  $f$  es inyectiva, tenemos que  $g(b) = 0$ , dada la conmutatividad del diagrama.

Por lo tanto, tenemos que la sucesión exacta de Birman, aplica para  $PMod(S_{g,n})$

### 3.2.3. La aplicación $Push$ sobre lazos en términos de twist de Dehn

Para un lazo simple  $\alpha$  basado en un punto  $x$  de  $S$ , podemos dar un representante explícito de  $Push(\alpha)$  de la siguiente forma. Identifique una vecindad de  $\alpha$  con el anillo  $S_1 \times [0, 2]$ , orientando este último de forma estándar. Suponga que el punto marcado  $x$  está en  $(0, 1)$  en el anillo. Hay una isotopía del anillo dada por:

$$f((\theta, r), t) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & 0 \leq r \leq 1 \\ (\theta + 2\pi(2-r)t, r) & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Y por la extensión de isotopía, podemos extender  $F$  para obtener una isotopía de  $S$ . Cuando restringimos  $F$  a  $\{x\} \times [0, l]$  tenemos

$$F((0, 1), t) = (2\pi t, 1)$$

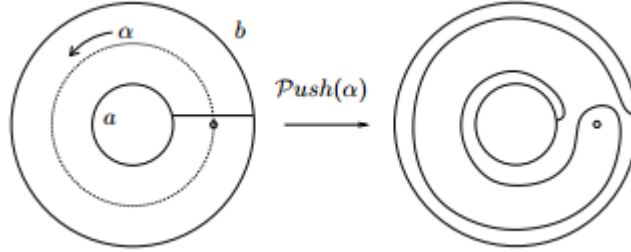


Figura 4: Aplicación  $Push$  como twist de Dehn

**Hecho 3.1.** Sea  $\alpha$  un lazo simple en la superficie  $S$  representando un elemento de  $\pi_1(S, x)$ . Entonces

$$Push(\alpha) = \tau_a \tau_b^{-1}$$

donde  $a$  y  $b$  son las clases de isotopía de las curvas cerradas en  $S^*$  obtenida por mover la curva  $\alpha$  fuera de ella misma para la izquierda y la derecha. Estas clases de isotopía son no separadoras si  $\alpha$  es no separadora en  $S$ .

**Hecho 3.2.** Para cualquier  $h \in \text{Mod}(S, x)$  y  $\alpha \in \pi_1(S, x)$

$$Push(h_*(\alpha)) = hPush(\alpha)h^{-1}$$

### 3.2.4. El grupo Modular de $S_{0,n}$

Vamos a hallar  $\text{PMod}(S_{0,n})$ . Procedemos bajo el siguiente análisis Para  $n \leq 3$  tenemos que  $\text{PMod}(S_{0,n})$  es trivial. Para  $n \geq 4$  usamos la sucesión exacta de Birman en su versión del grupo modular puro (3.2.2)

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{0,3}) \rightarrow \text{PMod}(S_{0,4}) \rightarrow \text{PMod}(S_{0,3}) \rightarrow 1$$

y sabemos que  $\text{PMod}(S_{0,3})$  es trivial, por lo tanto,  $\text{PMod}(S_{0,4}) \simeq \pi_1(S_{0,3})$  y este último es isomorfo a  $F_2$  el grupo libre con 2 generadores.

Para  $n = 5$  tendríamos

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{0,4}) \rightarrow \text{PMod}(S_{0,5}) \rightarrow \text{PMod}(S_{0,4}) \rightarrow 1$$

y tenemos que  $\pi_1(S_{0,4}) \simeq F_3$  y  $\text{PMod}(S_{0,4}) \simeq F_2$ , y tendríamos que  $\text{PMod}(S_{0,5}) \simeq F_3 \rtimes F_2$

Por ende, para  $S_{0,n}$  es seguir extendiendo el producto por el grupo fundamental de la esfera con  $n - 1$  puntos marcados. El hecho (3.1) junto con que  $\pi_1(S_{0,n})$  es generado por finitos elementos, nos da que  $\text{PMod}(S_{0,n})$  es generado por finitos twist de Dehn. Para generar los elementos de  $\text{Mod}(S_{0,n})$ , aplicamos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow \text{PMod}(S_{0,n}) \rightarrow \text{Mod}(S_{0,n}) \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1$$

Por lo tanto, un conjunto de generadores para  $\text{Mod}(S_{0,n})$  es obtenido del conjunto de generadores de  $\text{PMod}(S_{0,n})$  junto con los levantamientos de los generadores de  $\Sigma_n$ . Sabemos que  $\Sigma_n$  es generado por transposiciones, que son finitas. Por lo tanto, tendríamos que  $\text{Mod}(S_{0,n})$  es finitamente generado.

### 3.2.5. Generación finita

Para mostrar que  $\text{Mod}(S)$  es generado finitamente, vamos a considerar su acción sobre el complejo de curvas  $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ . Note que  $\text{Mod}(S)$  actúa sobre este complejo ya que los homeomorfismos toman curvas cerradas simples no separadoras y las envía a curvas cerradas simples no separadoras y además se preserva el número de intersección.

De la teoría geométrica de grupos, se tiene el siguiente resultado: Si un grupo  $G$  actúa en un espacio camino-conexo  $X$  y  $D$  es un subespacio de  $X$  cuyos traslados por  $G$  cubren  $X$ , entonces  $G$  es generado por el conjunto  $\{g \in G : gD \cap D \neq \emptyset\}$ . [4] El siguiente lema es una versión especial de este resultado diseñado específicamente para poderlo aplicar a la acción de  $\text{Mod}(S)$ .

**Lema 3.2.** *Suponga que un grupo  $G$  actúa por automorfismos simpliciales sobre un complejo simplicial 1-dimensional conexo  $X$ . Suponga que  $G$  actúa transitivamente sobre los vértices de  $X$  que están conectados por una arista. Sean  $v$  y  $w$  los dos vértices de  $X$  que están unidos por una arista y elija  $h \in G$  tal que  $h(w) = v$ . Entonces, el grupo  $G$  es generado por el elemento  $h$  junto con el estabilizador de  $v$  en  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $g \in G$ , a ver,  $g$  está contenido en  $H < G$  donde  $H$  es generado por  $\text{Stab}(v)$  junto con  $h$ . Como  $X$  es conexo, tenemos entonces que hay una sucesión de vértices  $v = v_0, v_1 \dots v_k = g(v)$  donde los vértices adjuntos están conectados por una arista. Como la acción de  $G$  es transitiva, podemos elegir  $g_i \in G$  de tal forma que  $g_i(v) = v_i$  con  $0 \leq i \leq k$ . Tome  $g_0 = 1$  y  $g_k = g$ . Miremos por inducción que  $g_i \in H$ .

- $i = 0$ , sabemos que  $g_0 = 1 \in H$
- Suponga que  $g_i \in H$
- Probemos que  $g_{i+1} \in H$ . Aplicando  $g_i^{-1}$  a la arista entre  $v_i = g_i(v)$  y  $v_{i+1} = g_{i+1}(v)$  obtenemos arista entre  $v$  y  $g_i^{-1}g_{i+1}(v)$ . Como  $G$  actúa transitivamente en pares ordenados de vértices de  $X$  que están conectados, tenemos que existe un elemento  $r \in G$  que toma el par  $(v, g_i^{-1}g_{i+1}(v))$  y lo envía en el par  $(v, w)$ , en particular,  $r \in \text{Stab}(v)$  y  $rg_i^{-1}g_{i+1}(v) = w$  por lo tanto  $hrg_i^{-1}g_{i+1}(v) = v$  y tendríamos que  $hrg_i^{-1}g_{i+1} \in \text{Stab}(v)$ . Como  $h, r, g_i \in H$  tenemos entonces que  $g_{i+1} \in H$ , en particular,  $g_k \in H$

□

**Teorema 3.5.** *Sea  $S_{g,n}$  con  $g \geq 1$  y  $n \geq 0$  puntos marcados. Entonces  $\text{PMod}(S_{g,n})$  es finitamente generado por twists de Dehn a los largo de curvas cerradas simples no separadoras en  $S_{g,n}$ .*



Recuerde que ya vimos este resultado para el caso  $g = 0$ .

*Demostración.* La prueba se desarrolla mediante una doble inducción, primero en  $n$  y luego en  $g$ . Sea  $g \geq 1$  fijo, vamos a hacer inducción en  $n$ , los casos bases serían  $S_{1,0}, S_{1,1}$  que ya conocemos que se generan finitamente por twist de Dehn a lo largo de curvas cerradas simples no separadoras. Para la hipótesis asuma que  $\text{PMod}(S_{g,n})$  es generado por finitos twist de Dehn definidos sobre curvas no separadoras  $\{\alpha_i\}$  en  $S_{g,n}$ . Mostremos que  $\text{PMod}(S_{g,n+1})$  es generado por finitas curvas no separadoras en  $S_{g,n+1}$  (Asume que  $(g,n) \neq (1,0)$  ya que sabemos que  $\text{Mod}(S_{1,1}), \text{Mod}(S_{1,0})$  es generado por finitos twist de Dehn definidos sobre curvas cerradas simple no separadoras).

Tenemos entonces:

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}) \rightarrow \text{PMod}(S_{g,n+1}) \rightarrow \text{PMod}(S_{g,n}) \rightarrow 1$$

Como  $g \geq 1$  tenemos que  $\pi_1(S_{g,n})$  es generado por clases de curvas no separadoras simples, por el hecho (3.1) la imagen de cada uno de estos es el producto de dos twist de Dehn alrededor de curvas no separadoras. Empezamos la construcción de los generadores de  $\text{PMod}(S_{g,n+1})$  tomando cada uno de estos twist de Dehn individualmente. Para completar el conjunto de generadores, necesitamos elegir un levantamiento de cada twist de Dehn  $\tau_{\alpha_i}$  generador en  $\text{PMod}(S_{g,n})$ . Por el mapa *Forget*, dada una curva no separadora  $\alpha_i$  en  $S_{g,n}$  existe una curva no separadora en  $S_{g,n+1}$  cuya imagen es  $\alpha_i$ . Por lo tanto, el twist de Dehn  $\tau_{\alpha_i}$  en  $\text{PMod}(S_{g,n})$  tiene una preimagen en  $\text{PMod}(S_{g,n+1})$  que es un twist de Dehn alrededor de la curva no separadora mencionada arriba en  $S_{g,n+1}$ .

Como  $\text{Mod}(S_{1,0})$  y  $\text{Mod}(S_{1,1})$  se generan con dos twists de Dehn definidos en curvas cerradas simples no separadoras, se sigue de la inducción en  $n$  que para  $n \geq 0$  el grupo  $\text{PMod}(S_{1,n})$  es generado por finitos twist de Dehn, definidos en curvas cerradas simples no separadoras.

Ahora, inducción en  $g$ . Sea  $g \geq 2$  y asuma que  $\text{PMod}(S_{g-1,n})$  es finitamente generado para  $n \geq 0$ . Como  $\widehat{\mathcal{N}}(S_g)$  es conexo, por el principio de cambio de coordenadas, tenemos que  $\text{Mod}(S_g)$  actúa transitivamente en pares ordenados de clases de isotopía de curvas cerradas simples con intersección geométrica 1. Aplicamos el lema (3.2) en el caso de  $\text{Mod}(S_g)$  actuando sobre  $\widehat{\mathcal{N}}(S_g)$ . Sea  $a$  clase de isotopía de una c.c.s. no separadora en  $S_g$  y sea  $b$  otra clase de isotopía de una c.c.s. no separadora con  $i(a,b) = 1$ .

Defina  $\text{Mod}(S_g, a) = \text{Stab}(a)$  en  $\text{Mod}(S_g)$ . Aplicando el lema (3.2)  $\text{Mod}(S_g)$  es generado por  $\text{Mod}(S_g, a)$  junto con  $\tau_a, \tau_b$  ya que sabemos por la proposición 3.7 que  $\tau_b \tau_a(b) = a$ . Por lo tanto, es suficiente mostrar que  $\text{Mod}(S_g, a)$  es generado por finitos twist de Dehn alrededor de c.c.s. no separadoras.

Defina  $\text{Mod}(S_g, \vec{a})$  como el subgrupo de  $\text{Mod}(S_g, a)$  que consiste de los elementos que preservan la orientación de  $a$  y tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \text{Mod}(S_g, \vec{a}) \rightarrow \text{Mod}(S_g, a) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Como  $\tau_b \tau_a^2 \tau_b$  cambia la orientación de  $a$  (este representa el coconjunto no trivial  $\text{Mod}(S_g, \vec{a})$  en  $\text{Mod}(S_g, a)$ ), luego sólo hay que mirar que  $\text{Mod}(S_g, \vec{a})$  es finitamente generado por twist de Dehn definidos sobre c.c.s. no separadoras.

Por la proposición (3.9) tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \langle \tau_a \rangle \rightarrow \text{Mod}(S_g, \vec{a}) \rightarrow \text{Mod}(S_g - \alpha) \rightarrow 1$$

donde  $\text{Mod}(S_g - \alpha)$  es la superficie obtenida de  $S_g$  borrando a  $\alpha \in a$  consiguiendo así una superficie que es homeomorfa a  $S_{g-1,2}$ . Por lo tanto  $\text{Mod}(S_g - \alpha)$  es finitamente generado por twist de Dehn definidas sobre c.c.s. no separadoras. Cada uno de esos twist de Dehn tiene preimagen en  $\text{Mod}(S_g, \vec{a})$  que es también un twist de Dehn definida sobre una c.c.s. no separadora, por lo tanto  $\text{Mod}(S_g, \vec{a})$  es finitamente generado, con lo que podemos concluir nuestra inducción y concluir que  $\text{Mod}(S_{g,n})$  es finitamente generado.  $\square$

### 3.2.6. La relación de cadena

Esta última sección, va a ser necesaria para el final de la prueba del teorema de Lickorish.

**Proposición 3.10.** [4, Prop. 4.12] *Sea  $k \geq 1, c_1, c_2 \dots c_k$  una cadena de curvas en la superficie  $S$ . Si tomamos un representante  $c_i$  que esté en posición minimal, luego tomando una vecindad regular cerrada de la unión entonces la frontera de esta vecindad consiste de una o dos curvas cerradas simples. Denotelas  $d$  si  $k$  es par y  $d_1, d_2$  si  $k$  es impar. Entonces tenemos:*

$$\begin{aligned} (\tau_{c_1} \dots \tau_{c_k})^{2k+2} &= \tau_d \\ (\tau_{c_1} \dots \tau_{c_k})^{k+1} &= \tau_{d_1} \tau_{d_2} \end{aligned}$$

La demostración de esta proposición es usando el método de Alexander[4]. El caso en el que  $k = 2$  tenemos  $(\tau_a \tau_b)^6 = \tau_d$  donde  $d$  es la frontera de la vecindad regular de  $a \cup b$ . Si  $a, b$  caen en  $S_{1,0}$  o  $S_{1,1}$  tenemos que  $d$  es trivial y tenemos que  $(\tau_a \tau_b)^6 = 1$

### 3.2.7. Generadores de Lickorish

**Teorema 3.6** (Los generadores de Lickorish). *Sea  $S_g$  una superficie cerrada de genero  $g \geq 1$ .*

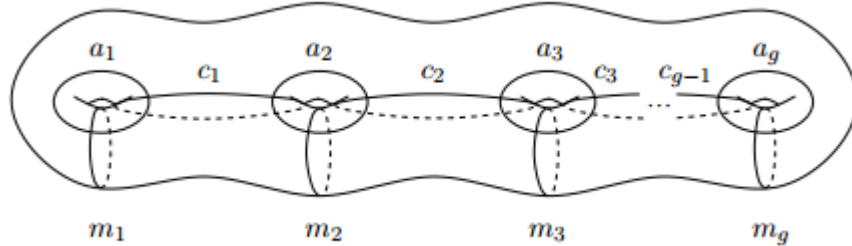


Figura 5: Generadores de Lickorish

entonces los twist de Dehn definidos sobre las clases de isotopía

$$a_1, \dots, a_g, m_1, \dots, m_g, c_1, \dots, c_{g-1}$$

generan  $\text{Mod}(S_g)$

*Demostración.* Caso base, los generadores de Lickorish para  $S_1$  son los de  $\text{Mod}(S_1)$ . Así mismo para  $g \geq 2$  apliquemos el lema (3.2) a la acción de  $\text{Mod}(S_g)$  sobre el complejo simplicial 1-dimensional  $\widehat{\mathcal{N}}(S_g)$ . Por la proposición (3.7) tenemos que  $\tau_{a_1} \tau_{m_1} \tau_{a_1}(m_1) = a_1$ , luego por el lema (3.2) es suficiente mostrar que  $\text{Mod}(S_g, m_1)$  cae en el grupo generado por los twist de Dehn. Si  $\text{Mod}(S_g, \vec{m}_1)$  es el subgrupo de  $\text{Mod}(S_g)$  que consiste de los elementos que preservan la orientación de  $m_1$ , entonces tenemos:

$$1 \rightarrow \text{Mod}(S_g, \vec{m}_1) \rightarrow \text{Mod}(S_g, m_1) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Dado que el producto de los twist de Dehn  $\tau_{a_1} \tau_{m_1}^2 \tau_{a_1}$  reversa la orientación de  $m_1$ . Es suficiente entonces mostrar que  $\text{Mod}(S_g, \vec{m}_1)$  cae en el grupo generado por los twist de Dehn. Por la proposición (3.9) tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow \langle \tau_{m_1} \rangle \rightarrow \text{Mod}(S_g, \vec{m}_1) \rightarrow \text{PMod}(S_{m_1}) \rightarrow 1$$

Con  $S_{m_1} \simeq S_{g-1,2}$  la superficie obtenida de borrar un representante de  $m_1$  de  $S_g$  (un abuso de notación, pero para no hacer la escritura más pesada). Como  $\tau_{m_1}$  es un twist de Dehn, es suficiente mostrar que  $\text{PMod}(S_{m_1})$  es generado por las imágenes de los twist de Dehn:

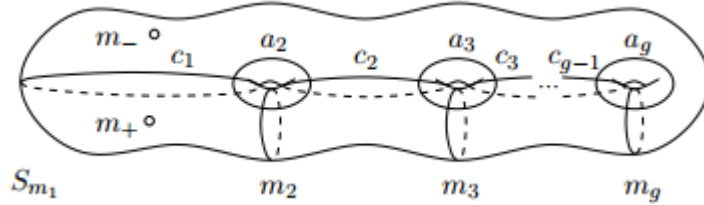


Figura 6: Superficie de ayuda.  $S_{m_1}$

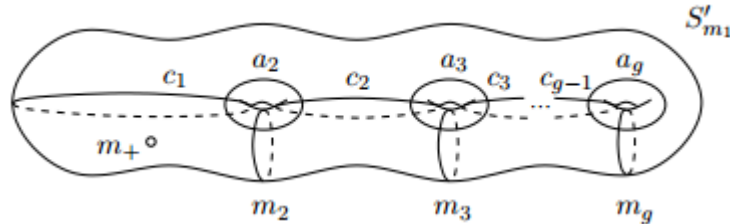


Figura 7: Superficie de ayuda.  $S'_{m_1}$

Ahora, apliquemos la sucesión exacta de Birman dos veces. Sea  $S'_{m_1}$  superficie obtenida de  $S_{m_1}$  quitando el punto  $m_-$  y sea  $S''_{m_1}$  la superficie obtenida al quitar el otro punto.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(S'_{m_1}, m_-) & \xrightarrow{Push} & PMod(S_{m_1}) & \longrightarrow & Mod(S'_{m_1}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(S_{g-1,1}) & \longrightarrow & PMod(S_{g-1,2}) & \longrightarrow & Mod(S_{g-1,1}) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1(S''_{m_1}, m_+) & \xrightarrow{Push'} & Mod(S'_{m_1}) & \longrightarrow & Mod(S''_{m_1}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(S_{g-1}) & \longrightarrow & Mod(S_{g-1,1}) & \longrightarrow & Mod(S_{g-1}) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Ahora estudiemos las sucesiones, empecemos por la última. La meta es hallar que  $Mod(S'_{m_1})$  es generada por las imágenes de los twist Dehn en  $Mod(S'_{m_1})$ , eso es que  $Mod(S'_{m_1})$  es generado por los twist de Dehn alrededor de las curvas en la figura 7- Por inducción  $Mod(S''_{m_1}) \simeq S_{g-1}$  es generado por twist de Dehn definidos sobre las imágenes de las curvas en la figura 7. Luego por el segundo diagrama de sucesiones exactas, es suficiente mostrar que cada elemento de  $Push'(\pi_1(S''_{m_1}))$  es producto de twist de Dehn. Los generadores de  $\pi_1(S''_{m_1}) \simeq \pi_1(S_{g-1})$  son dados por los siguientes:

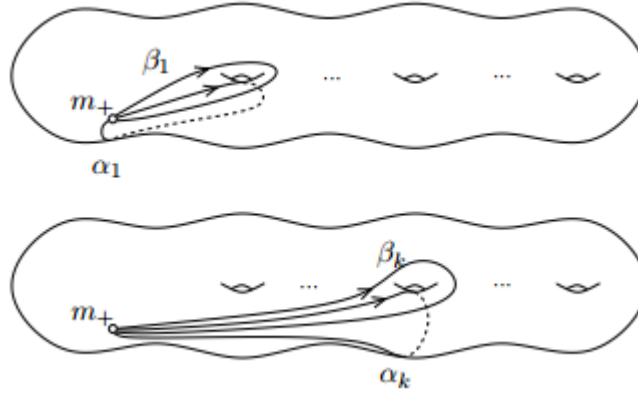


Figura 8: Generadores del grupo  $\pi_1(S''_{m_1}, m_+)$

La clase de  $Push'(\alpha_1)$  es igual al producto de  $\tau_{c_1} \tau_{m_2}^{-1}$ , luego es producto de twist de Dehn. ¿Cómo escribir  $\beta_1$  como producto de twist de Dehn?

Por la proposición (3.7) tenemos que  $\tau_{m_2}\tau_{a_2}(\alpha_1) = \beta_1$ . Luego por el hecho (3.1),  $Push'(\beta_1)$  es conjugado de  $Push'(\alpha_1)$  por un producto de twist de Dehn. Repitiendo este truco de conjugación, cada generador de  $\pi_1(S''_{m_1})$  bajo  $Push'$  es producto de imágenes de twist de Dehn en  $Mod(S'_{m_1})$  cuyas fórmulas son:

$$\begin{aligned}(\tau_{c_i}^{-1}\tau_{a_{i+1}}^{-1})(\tau_{a_i}^{-1}\tau_{c_i}^{-1})(\beta_{i-1}) &= \beta_i \\ \tau_{a_{i+1}}^{-1}\tau_{m_{i+1}}^{-1}(\beta_i) &= \alpha_i\end{aligned}$$

Al parecer, los twist de Dehn son ideales para que se cumplan estas. Pasando al primer diagrama de sucesiones, sólo faltaría mostrar que  $Push(\pi_1(S'_{m_1}, m_-))$  cae en el grupo generado por los twist de Dehn definidos sobre las curvas en la figura 6. La prueba es esencialmente la misma a la de la parte anterior. Para facilitar este argumento, es de gran ayuda notar que cada  $\tau'_{m_i}$  es un producto de twist de Dehn, donde  $m'_2, m'_3 \dots m'_{g-1}$  son las clases de isotopía de la siguiente figura:

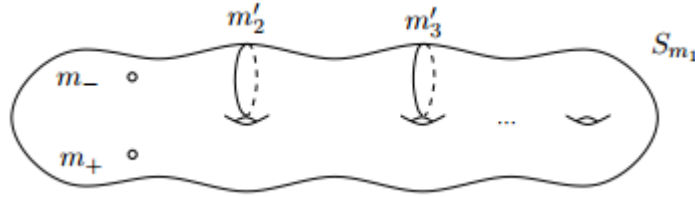


Figura 9: Los twist de Dehn  $\tau_{m'_1}, \tau_{m'_2} \dots \tau_{m'_{g-1}}$

Esto se sigue de la relación de cadena

$$(\tau_{m_g}\tau_{a_g}\tau_{c_{g-1}}\tau_{a_{g-1}}\tau_{c_{g-2}}\dots\tau_{a_{k+1}}\tau_{c_k})^{2(g-k+1)} = \tau_{m_k}\tau'_{m_k}$$

□

## Referencias

- [1] Lars Valerian Ahlfors and Lipman Bers. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces. (AM-66)*, volume 66. Princeton University Press, 1971.
- [2] Keith Conrad. Sl2 (z). *Expository Papers*, <http://www.math.uconn.edu/kconrad/blurbs>.
- [3] Robert D Edwards. Topological regular neighborhoods. *arXiv preprint arXiv:0904.4665*, 2009.
- [4] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*. Princeton University Press, 2011.
- [5] G Massuyeau. A short introduction to mapping class groups, 2009.