

SUPERFICIES DE HURWITZ

POR: SERGIO PEDRAZA RODRÍGUEZ

DIRECTOR: FLORENT SCHAFFHAUSER

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, COLOMBIA

2011

Índice general

Introducción	1
1. Superficies de Riemann	2
1.1. Definiciones	2
1.2. Ejemplos	3
1.3. Clasificación topológica	4
2. Automorfismos de superficies de Riemann	8
2.1. Definiciones y ejemplos	8
2.2. Teorema de uniformización	14
2.3. Teorema de Hurwitz	20
3. La cuártica de Klein	25
3.1. Definición de la cuártica de Klein	25
3.2. El grupo de automorfismos de la cuártica de Klein	26
3.3. Otras superficies que alcanzan la cota de Hurwitz	28

Introducción

En 1893 A.Hurwitz [8] dio una cota para el número de automorfismos de una superficie de Riemann compacta de género mayor a 1, utilizando el hecho de que el grupo de automorfismos de una curva algebraica de género $g \geq 2$ es finito, probado anteriormente por H.A.Schwarz [3]. Es por esto que el enfoque del presente trabajo será estudiar el grupo de automorfismos para superficies de Riemann compactas. Esta decisión radica en que la característica principal de una superficie de Hurwitz, aparte de ser una superficie de Riemann, es que el orden de su grupo de automorfismos además de ser finito alcance una determinada cota. Lo interesante es que aunque se ha demostrado que se pueden construir infinitas superficies que alcanzan tal cota gracias a la teoría de grupos [7], actualmente sólo se conocen dos superficies con descripción geométrica, descubrimientos separados por más de ochenta años, siendo la primera, la cuártica de Klein, la principal motivación del presente estudio.

La cuártica de Klein es una superficie de Riemann que aparte de admitir una variedad de descripciones matemáticas [1], tiene una descripción geométrica como superficie de Riemann. La particularidad de la cuártica de Klein, siendo una curva algebraica de género 3, es que puede ser transformada en ella misma de 168 diferentes maneras. Este descubrimiento fue hecho por Felix Klein [5], pero se necesitaron cerca de 60 años para que alguien notara que existía una relación entre el género de tal superficie y el orden de su grupo de automorfismos [8].

Con el fin de estudiar el grupo de automorfismos de la cuártica de Klein, en el primer capítulo recordaremos algunas definiciones, veremos algunos ejemplos de superficies de Riemann y estableceremos cómo debe ser vista, topológicamente, una superficie de Riemann. En el segundo capítulo estudiaremos el grupo de automorfismos para superficies compactas de diferente género y demostraremos el teorema de Hurwitz, estableciendo así la definición de una superficie de Hurwitz. Por último, en el tercer capítulo, introduciremos la cuártica de Klein y específicamente estudiaremos su grupo de automorfismos.

Capítulo 1

Superficies de Riemann

1.1. Definiciones

Para el estudio del análisis complejo y en especial las superficies de Riemann es importante introducir el concepto de función holomorfa. Sean U y V dos abiertos de \mathbb{C} y $f: U \rightarrow V$. Se dice que f es **holomorfa** en el punto $z_0 \in U$ si el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existe, con $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si para todo $z \in U$, f es holomorfa en z , entonces se dice que f es holomorfa en todo U .

Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico separable, Hausdorff, segundo contable y localmente homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.1. *Dos cartas $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{C})$, $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{C})$ de una variedad topológica son compatibles si las dos aplicaciones $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ y $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ son holomorfas. A estos dos aplicaciones se les llama funciones de transición entre cartas.*

Definición 1.2. *Un atlas holomorfo en una variedad M es una colección de cartas $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$ compatibles que cubren a M . Es decir, las funciones de transición son holomorfas y $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.*

Definición 1.3. *Una **Superficie de Riemann** es una variedad topológica de dimensión dos que admite un atlas holomorfo.*

Teorema 1.4. *Toda superficie de Riemann es orientable.*

Demostración. Sea M una superficie de Riemann y dos cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dado que M es una superficie de Riemann entonces la función $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. Ahora, si las coordenadas de U_2 están dadas por $\phi_2 = (P(x, y), Q(x, y))$ y las de U_1 por $\phi_1 = (x, y)$. Entonces la matriz $(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(x, y)$ en $U_1 \cap U_2$ está dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Como la función de transición es holomorfa entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

y por ende

$$\det(A) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)^2 > 0$$

Entonces A es una matriz de similitud que tiene determinante positivo. Lo anterior implica que para dos abiertos no disjuntos de cualquier atlas holomorfo la matriz de transición tiene determinante positivo lo cual a su vez implica que M es orientable. \square

Teorema 1.5 (Forma normal local de una aplicación holomorfa [4]). Sean X y Y dos superficies de Riemann y $f : Y \rightarrow X$ es una aplicación holomorfa no constante. Sea $a \in Y$ y $b := f(a)$. Entonces existe un entero $k_a \geq 1$ y cartas (U_b, ψ_b) en X y (U_a, ϕ_a) en Y tal que:

$$(I) \quad a \in U_a, \phi_a(a) = 0; b \in U_b, \psi_b(b) = 0$$

$$(II) \quad f(U_a) \subset U_b$$

$$(III) \quad \text{La aplicación } \psi_b \circ f \circ \phi_a^{-1}(z) = z^{k_a} \text{ para todo } z \in U_a$$

Definición 1.6. Sean X y Y dos superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa no-constante. Llamaremos a $y \in Y$ un **punto de ramificación** si no existe un abierto V de y tal que $p|_V$ sea inyectiva. Llamaremos $S_p \in Y$ al conjunto de puntos de ramificación de la aplicación p .

Definición 1.7. Sean X y Y dos superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa no-constante. Definiremos el **grado** de la aplicación p para todo $x \in X$ como

$$g_p(x) = \sum_{y \in p^{-1}(\{x\})} k_y$$

Observación 1.8. El grado de una aplicación se define a partir de los enteros que provienen de la forma local los cuales están bien definidos. Es importante aclarar que el grado de una aplicación es una función constante sobre todo el rango de la aplicación y por ende no depende de donde se evalúe [4].

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.9. Todo abierto $U \in \mathbb{C}$ es una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.10. El plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann. Considere las siguientes cartas:

$$U_1 = \mathbb{C}, \quad \phi_1(z) = z, \quad z \in U_1$$

$$U_2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\} \quad , \quad \phi_2(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Se comprueba que U_1 y U_2 cubren a \mathbb{CP}^1 y que en $(U_1 \cap U_2)$ las funciones $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_2 \cap U_1)$ y $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_2 \cap U_1)$ son holomorfas ya que $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(z) = 1/z$ y $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$.

Ejemplo 1.11. Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes y sea $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ un retículo de \mathbb{C} . Sea $M = \mathbb{C}/\Gamma$, es decir $z \sim z'$ si existe β en Γ tal que $z' = z + \beta$. Sea $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección conónica, es decir la que le asigna a cada z su clase de equivalencia mod Γ . Sobre M se define una topología (topología cociente) de la siguiente forma: todo $V \in \mathbb{C}/\Gamma$ es abierto si $f^{-1}(V)$ es abierto. Bajo esta topología \mathbb{C}/Γ es de Hausdorff y p es continua. Además como \mathbb{C} es conexo \mathbb{C}/Γ también lo es. Mostremos ahora que p es una aplicación abierta. Para esto queremos ver que $V := p^{-1}(p(U))$ es abierto con U abierto. Pero $V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U + \gamma$, los cuales son abiertos ya que γ es una acción continua y por ende V es abierto.

Ahora definamos la estructura compleja de \mathbb{C}/Γ . Γ es discreto en \mathbb{C} , entonces para cualquier z en \mathbb{C} existe un $r_z > 0$ tal que $\mathbf{D}(z, r_z) \cap \Gamma = \{z\}$. Considere $p|_{\mathbf{D}(z, r_z)} : \mathbf{D}(z, r_z) \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$. Como p es abierto, entonces $p(\mathbf{D}(z, r_z))$ es abierto. Entonces podemos definir para todo z un $U_z := p(\mathbf{D}(z, r_z))$ los cuales forman un cubrimiento abierto de \mathbb{C}/Γ .

Dado que $p|_{\mathbf{D}(z, r_z)}$ es un homeomorfismo definamos la aplicación ϕ como su inverso. Entonces para cada U_z tenemos $\phi_i : U_z \rightarrow \mathbf{D}(z, r_z)$. Ahora veamos que las cartas (U_z, ϕ_z) son compatibles.

$$\Phi := \phi_{z_i} \circ \phi_{z_j}^{-1} : \phi_{z_j}(U_{z_i} \cap U_{z_j}) \rightarrow \phi_{z_i}(U_{z_i} \cap U_{z_j})$$

Sea $z \in U_{z_i} \cap U_{z_j}$, $p(\phi_{z_i} \circ \phi_{z_j}^{-1}(z)) = p(\phi_{z_i}(z)) = p(z)$ entonces existe $\beta \in \Gamma$ tal que $\Phi(z) = z + \beta$, es decir Φ es una traslación bajo elementos de Γ lo cual es una función holomorfa.

Observación 1.12. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario. La aplicación que asocia a un punto $\gamma = a\omega_1 + b\omega_2$ de \mathbb{C} el punto $(e^{2ai\pi}, e^{2bi\pi}) \in S^1 \times S^1$ es un homeomorfismo de \mathbb{C}/Γ en $S^1 \times S^1$, i.e. \mathbb{C}/Γ es homeomorfo a un toro.

1.3. Clasificación topológica

Teorema 1.13 (Teorema de clasificación para superficies compactas orientables [9]). Toda superficie compacta orientable es homeomorfa o a una esfera o a una suma conexa de toros.

Es importante notar que el teorema 1.13 generaliza la observación 1.12, donde se muestra cómo una superficie con estructura de superficie de Riemann es homeomorfa a un toro.

Teorema 1.14 ([4]). Una superficie topológica orientable admite una estructura de superficie de Riemann.

Del teorema 1.13 se desprende que toda superficie de Riemann puede ser vista topológicamente o como una esfera o como una suma conexa de toros.

Dada una superficie de Riemann compacta, existe una triangulación de ésta [9]. Por ejemplo podemos visualizar la superficie de la tierra dividida en triángulos. Una prueba rigurosa de este hecho requiere del teorema de la curva de Jordan.

Definición 1.15 (Característica de Euler para una superficie.). Sea M una superficie compacta con una triangulación $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Sea $\alpha_0 =$ Número total de vértices, $\alpha_1 =$ Número total de lados y $\alpha_2 =$ Número total de caras para la triangulación dada, entonces la característica de Euler está dada por:

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

Cabe aclarar que la característica de una superficie no depende de la triangulación, es decir es un invariante numérico de la superficie.

Demostración.

Definición 1.16. Dadas dos triangulaciones T_1 y T_2 , diremos que T_1 es más fina que T_2 (i.e. $T_1 \triangleleft T_2$) si cualquier vértice de T_2 es un vértice de T_1 y cualquier triángulo de T_2 es una unión de triángulos de T_1 .

Para probar entonces, que dadas dos triangulaciones la característica de Euler es invariante necesitamos realizar dos comprobaciones:

- (I) Dada una triangulación T_1 podemos encontrar una triangulación T más fina que T_1 (i.e. $T \triangleleft T_1$) donde $\chi_{T_1}(M) = \chi_T(M)$.

Existen dos procesos para originar una triangulación más fina, que preservan la característica de Euler, dada una triangulación T_1 :

- a) Agregar un punto interior a la cara de un triángulo y trazar de este punto líneas a los vértices del triángulo. Esta acción preserva la característica de Euler del triángulo y la de la superficie.
- b) Agregar un punto interior a una arista de un triángulo y trazar líneas a los vértices opuestos de la arista. Esto se debe a que todo punto interior a una arista pertenece a dos triángulos. La anterior acción también preserva la característica de Euler de la superficie.

Ambas acciones crean una nueva triangulación T que cumple que $\chi_{T_1}(M) = \chi_T(M)$.

- (II) Dadas dos triangulaciones T_1 y T_2 existe una triangulación que puede ser construida por medio de los pasos anteriores tal que $T \triangleleft T_1$ y $T \triangleleft T_2$. Si T_1 y T_2 son dos triangulaciones de una misma superficie ellas se deben intersectar. Si un vértice de un triángulo de T_1 es un punto de interior de la cara de un triángulo de T_2 procedo como en a) y viceversa. Para las intersecciones entre aristas de triángulos de T_1 y T_2 procedo como en b) y así lo hago para todas las intersecciones de T_1 y T_2 formando una nueva triangulación T la cual cumple el inciso (i).

Como $T \triangleleft T_1$ y $T \triangleleft T_2$ y T cumple el inciso (i) para ambas triangulaciones entonces

$$\chi_{T_1}(M) = \chi_{T_2}(M).$$

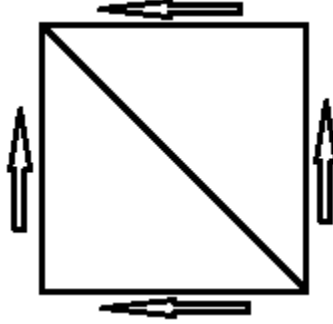


Figura 1.1: Toro

□

Proposición 1.17. Sean M_1 y M_2 superficies compactas. La característica de Euler de M_1 y M_2 y su suma conexa $M_1 \# M_2$ se relacionan de la siguiente manera:

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Demostración. Sean M_1 y M_2 dos superficies compactas con dos triangulaciones dadas T_1 y T_2 . Para realizar la suma conexa entre M_1 y M_2 retiramos un triángulo de cada una de las triangulaciones y los *pegamos* mediante un homeomorfismo que mande cada arista del triángulo retirado en M_1 a una arista del triángulo retirado en M_2 . Una prueba rigurosa se puede encontrar en [9].

Tras realizar la suma anterior M_1 perdió la cara de un triángulo y M_2 perdió: la cara de un triángulo, 3 aristas y 3 puntos. Esto último implica que

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) - 1 + \chi(M_2) - (1 + 3 - 3) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

□

Ejemplo 1.18. Veamos cual es la característica de Euler de un toro. Considere la Fig. 1.1 en donde se presenta el intervalo $I \times I$ cocientado por la clase de equivalencia indicada por las flechas. Esta topología cociente es la de un toro y en la Fig.1.1 se encuentra una triangulación $\{T_1, T_2\}$ del mismo. $\chi(T) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - 3 + 2 = 0$. Esto se debe a que los 4 vértices colapsan en 1 sólo y los lados del cuadrado se identifican, bajo el cociente, dos a dos.

Definición 1.19. El **género** de una superficie compacta orientable M se define como: $g(M) = \frac{2 - \chi(M)}{2}$ el cual también es un invariante de la superficie. Por ejemplo el género de un toro es 1 (Ejemplo anterior), el género de una suma conexa n toros es n .

Demostración. Supongamos como hipótesis de inducción que la característica de la suma conexa de n toros es $2 - 2n$. Como caso base está el ejemplo anterior. Ahora calculemos cuál es la característica de la suma de $n + 1$ toros.

$$\chi(\#_{i=1}^{n+1}T) = \chi(\#_{i=1}^nT) + \chi(T) - 2 = 2 - 2n - 2 = 2 - 2(n+1).$$

Entonces

$$g(\#_{i=1}^{n+1}T) = \frac{2 - 2 + 2(n+1)}{2} = n + 1.$$

□

De aquí podemos observar que el género y el número de agujeros en una superficie compacta son **iguales**, lo cual nos dará una intuición acerca de cómo es, topológicamente, una superficie de Riemann de género g .

Por último introducimos un teorema de gran importancia para el tercer capítulo del presente estudio.

Teorema 1.20 (Relación de Riemann-Hurwitz). *Sean Y y X dos superficies de Riemann compactas y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa no-constante de grado N . Entonces podemos relacionar las características de X y Y de la siguiente forma*

$$\chi(Y) = N\chi(X) - \sum_{y \in Y} (k_y - 1)$$

Demostración. Como Y y X son compactas admiten una triangulación. Recordemos que $S_p = \{y \in Y \mid k_y > 1\}$. Como Y es compacto entonces S_p es finito. Ahora, como toda aplicación holomorfa es abierta (gracias a la forma normal local) $p(S_p) \in X$ es finito y discreto. Considere entonces una triangulación más fina que contenga como nuevos vértices los puntos de $p(S_p)$. Suponga que esta nueva triangulación tiene α_0 vértices, α_1 aristas y α_2 caras. Mediante la aplicación p podemos *levantar* la triangulación de X en Y . Como el grado de p es N , en Y induciremos $N\alpha_1$ aristas y $N\alpha_2$ caras. Para contabilizar los vértices inducidos es importante considerar los puntos de ramificación. En cada punto de ramificación y de p se pegarán k_y vértices. Es decir k_y triángulos compartirán un vértice. Ahora, por cada punto en $p(S_p)$ induciremos $N - (k_y - 1)$ vértices en Y . Entonces si contamos todo vértice de la triangulación tanto ramificado como no ramificado el número de vértices inducidos en Y será $N\alpha_0 - \sum_{y \in Y} (k_y - 1)$ y por ende

$$\chi(Y) = N\alpha_2 - N\alpha_1 + \left(N\alpha_0 - \sum_{y \in Y} (k_y - 1) \right) = N\chi(X) - \sum_{y \in Y} (k_y - 1).$$

□

Capítulo 2

Automorfismos de superficies de Riemann

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1. Suponga que X y Y son superficies de Riemann. Una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ se dice que es holomorfa si para todo par de cartas (ϕ_x, U) en X y (ϕ_y, V) en Y con $f(U) \subset V$, la aplicación

$$\phi_y \circ f \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U) \rightarrow \phi_y(V)$$

es holomorfa. Una aplicación es biholomorfa si es biyectiva y tanto f como f^{-1} son holomorfas. Las superficies de Riemann X y Y son isomorfas si existe una función $f: X \rightarrow Y$ biholomorfa.

Proposición 2.2. Sean X y Y dos superficies de Riemann. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si y sólo si f es holomorfa y biyectiva.

Demostración. Lo único que necesitamos ver es que f^{-1} sea holomorfa. Sea $z \in U$ y sean (U, ψ) en X con $z \in U$ y (V, ϕ) en Y con $f(U) \subset V$ dos cartas de los atlas correspondientes. Por el teorema 1.5 para todo $z_0 \in U$ tenemos que $\phi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = z^k$. Debido a que f es biyectiva $k = 1$ y por ende la aplicación $F(z) := \psi \circ f \circ \phi(z) = z$ localmente actúa como la identidad de lo que se deduce que f^{-1} es holomorfa. \square

Definición 2.3. Un automorfismo de una superficie de Riemann X es una aplicación $f: X \rightarrow X$ biholomorfa.

Al conjunto de automorfismos de una superficie de Riemann M lo llamaremos $\text{Aut}(M)$ el cual tiene estructura de grupo. La operación de grupo es la composición de las respectivas aplicaciones, la identidad del grupo es la aplicación $z \mapsto z$ y el inverso de un automorfismo es la aplicación inversa ya que todas son aplicaciones biholomorfas. También es claro que si g y h son automorfismos su composición también lo es.

Ahora, uno de los objetivos en este estudio es encontrar una cota para el número de automorfismos, es decir el tamaño de $\text{Aut}(M)$, para una superficie de Riemann M de género mayor o igual a 2, pero por lo pronto veamos algunos ejemplos para superficies de género 0 y 1.

Proposición 2.4. *El grupo de $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ está dado por el conjunto de transformaciones*

$$G = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid ad - cb \neq 0 \right\}.$$

A este tipo de transformaciones las llamaremos transformaciones homográficas o transformaciones de Möbius.

Lema 2.5 ([4]). *El grupo de automorfismos de \mathbb{C} está dado por $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \alpha z + \beta\}$.*

Demostración de la proposición 2.4. Primero veamos que este conjunto de transformaciones forma un grupo. Consideremos la siguiente aplicación:

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) & \rightarrow & G \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}) \end{array}$$

Por medio de la aplicación ψ se puede establecer que ψ es un homomorfismo de grupos ya que multiplicar dos matrices A y B en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ produce una matriz que bajo ψ corresponde a la composición de las transformaciones homográficas en G que correspondían bajo ψ a las matrices A y B . Esto implica entonces que $G \cong \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) / \ker(\psi)$. Más adelante aclararemos la identificación de G .

Ahora veamos que en efecto una transformación del grupo G es un automorfismo de \mathbb{CP}^1 . Para esto necesitamos ver que que la transformación es biyectiva. Debido a que ψ es un homomorfismo de grupos, entonces todo elemento de G tiene inversa ya que toda matriz en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ tiene inversa. Veamos ahora que para dos cartas dadas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) de \mathbb{CP}^1 la aplicación $\phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}$ es biholomorfa. Para probar esto definimos $\phi_{12} := \phi_1 \circ f \circ \phi_2^{-1}$, entonces

$$\phi_{12} : \begin{cases} \phi_2(U_1 \cap U_2) & \rightarrow & \phi_1(U_1 \cap U_2) \\ z & \mapsto & \frac{cz+d}{az+b} \end{cases}$$

ϕ_{12} no está definida en $z_0 = \frac{-b}{a}$ pero puede extenderse a $\widehat{\phi}_{12} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ tal que $\widehat{\phi}_{12}(z_0) := \infty$, la cual es una aplicación holomorfa de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Como las transformaciones son biyectivas y además holomorfas entonces la transformación inversa también es holomorfa y por ende, bajo una extensión, $\widehat{\phi}_{12}^{-1}$ es holomorfa de \mathbb{C} en \mathbb{C} .

Ahora veamos que todo automorfismo de \mathbb{CP}^1 se escribe de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Sea $w := f(\infty)$, ahora definamos una función auxiliar $g(z) = \frac{1}{w-f(z)}$. Por construcción tenemos que g es una biyección holomorfa de \mathbb{CP}^1 a \mathbb{CP}^1 y que $g(\infty) = \infty$. Entonces $g|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una biyección

holomorfa y por ende un automorfismo de \mathbb{C} . Como todo $Aut(\mathbb{C})$ es de la forma $z \mapsto \alpha z + \beta$ por el lema 2.5, entonces $g(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha \neq 0$ y $f(z) = w - \frac{1}{g(z)} = w - \frac{1}{\alpha z + \beta} = \frac{wz\alpha + w\beta - 1}{\alpha z + \beta}$. Para que $f(z)$ pertenezca a G se requiere que pueda ser identificado con un elemento en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ y por ende tenga determinante distinto a cero, lo cual se confirma ya que $\alpha\beta w - \alpha(w\beta - 1) = \alpha \neq 0$. Podemos observar entonces que darse w, α y β es equivalente a darse $f(\infty) = w, f(0) = w - \frac{1}{\beta}$ y $f(1) = w - \frac{1}{\alpha + \beta}$ los cuales determinan totalmente $f \in Aut(\mathbb{CP}^1)$. \square

Como todo automorfismo de \mathbb{CP}^1 se puede ver como una transformación homográfica a la cual se le puede asociar una matriz en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ y además que al producto entre dos matrices se le puede asociar la composición de las transformaciones correspondientes, entonces la aplicación:

$$F : \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow Aut(\mathbb{CP}^1)$$

es un homomorfismo de grupos.

Sean A y $B \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ y suponga que $B = \alpha A$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Es claro que la transformación homográfica asociada a B es la misma transformación asociada a A , lo cual implica que toda transformación homográfica determina una matriz en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ salvo multiplicación por escalares. Por otro lado el $\ker(F) = \{A \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) : F(A) = I_{\mathbb{C}}\} = \{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \mathbb{C}^* \{I_2\}$. Utilizando el teorema del isomorfismo y debido a que $F(\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})) = Aut(\mathbb{CP}^1)$ entonces tenemos que:

$$Aut(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \{I_2\}.$$

El grupo $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \{I_2\}$ es el grupo de proyección lineal llamado $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Ahora consideremos el grupo $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ y considere la misma aplicación F . $\ker(F) = \{\pm Id\}$. Entonces, por medio del teorema del isomorfismo, tenemos que $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id\}$ es isomorfo a $Aut(\mathbb{CP}^1)$.

Observación 2.6. Llamaremos \mathbf{D} al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, i.e. el disco unitario.

Proposición 2.7. El grupo de $Aut(\mathbf{D})$ está dado por el conjunto de transformaciones

$$G = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ tal que } a\bar{a} - b\bar{b} > 0 \right\}.$$

Teorema 2.8 (Principio del Módulo Máximo [10]). Si f es una función holomorfa no constante en un compacto Ω entonces $|f|$ no tiene su máximo en el interior de Ω .

Lema 2.9 (Lema de Schwarz [10]). Sea $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ una función holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces

- (I) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbf{D}$.
- (II) Si existe $z_0 \neq 0$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces f es una rotación.
- (III) $|f'(0)| \leq 1$ y si la igualdad se cumple entonces f es una rotación.

Demostración de la proposición 2.7. Sea f un automorfismo de \mathbf{D} y $w := f(0) \in \mathbf{D}$. Ahora construiremos una función $g(z) = \frac{af(z)+b}{\bar{b}f(z)+\bar{a}}$ que se anule en 0.

Veamos primero que $|g(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbf{D}$. Si $|z| = 1$ entonces $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y

$$g(e^{i\theta}) = \frac{ae^{i\theta} + b}{\bar{b}e^{i\theta} + \bar{a}} = e^{-i\theta} \left(\frac{ae^{i\theta} + b}{\bar{b} + ae^{i\theta}} \right) = e^{-i\theta} \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)$$

donde $u = ae^{i\theta} + b$, y por ende $|g(z)| = 1$. Por el principio del módulo máximo concluimos que $|g(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbf{D}$.

Ahora, si queremos que $g(0) = 0$ entonces $g(0) = af(0) + b = 0$ y $aw + b = 0$. Si $a = 1$ entonces $b = -w$ y por ende $g(z) = \frac{f(z)-w}{1-\bar{w}f(z)}$. Sea $\psi_A : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ la aplicación que manda $z \mapsto \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$ y consideremos la matriz correspondiente a la homografía ψ_A

$$\begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\bar{w} & 1 \end{pmatrix}$$

la cual tiene determinante positivo ya que $|w| < 1$ y por ende pertenece a $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$.

Entonces, para todo automorfismo f de \mathbf{D} podemos definir una homografía tal que $\psi_A(0) = -f(0)$ con una matriz asociada en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$

Por construcción tenemos que $g = \psi_A \circ f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$, $g(0) = 0$ y es holomorfa. Por el Lema de Schwarz se tiene que

$$|g(z)| \leq |z| \text{ para todo } z \in \mathbf{D}$$

Además $g^{-1}(0) = 0$ y es holomorfa, entonces nuevamente por el lema de Schwarz se tiene que

$$|g^{-1}(u)| \leq |u| \text{ para todo } u \in \mathbf{D}$$

Si decimos que $u = g(z)$ entonces la última desigualdad implica que

$$|z| \leq |g(z)| \text{ para todo } z \in \mathbf{D}$$

Conjugando ambas desigualdades obtenemos que $|g(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbf{D}$ y por el lema de Schwarz g es una rotación, es decir $g(z)$ actúa de la forma $z \mapsto \alpha z$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $|\alpha| = 1$. Sea c una raíz cuadrada de α . Entonces la función g es una homografía con la matriz asociada $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{pmatrix}$ ya que

$$g(z) = \alpha z = \frac{cz}{\bar{c}} = \frac{c^2 z}{|c|^2}$$

$$|g(z)| = |z|$$

Por último podemos asociar a f la matriz $A^{-1}B$ que es de la forma $\begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & \bar{d} \end{pmatrix}$ en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$. \square

Como lo hicimos con $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$, el grupo $\text{Aut}(\mathbf{D})$ es isomorfo a $\mathbf{PU}(1, 1) = \mathbf{U}(1, 1)/\{\pm Id\}$ donde $\mathbf{U}(1, 1)$ es el grupo de isometrías de \mathbb{C}^2 bajo la forma cuadrática $f(z) = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

Debido a que más adelante identificaremos superficies de Riemann con cocientes del semiplano de Poincaré $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ es importante introducir las siguientes aplicaciones

$$F(z) = \frac{z-i}{z+i} \text{ y } G(z) = i \frac{w+1}{-w+1},$$

las cuales son isomorfismos entre \mathbf{H} y \mathbf{D} .

Teorema 2.10 ([10]). *La aplicación $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$ es biholomorfa con inversa $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{H}$.*

Proposición 2.11. *El grupo de $\text{Aut}(\mathbf{H})$ está dado por el conjunto de transformaciones*

$$G = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tales que } ad - bc > 0 \right\}.$$

Demostración. Dado que \mathbf{D} y \mathbf{H} son isomorfos podemos construir una aplicación $f : \text{Aut}(\mathbf{D}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{H})$ que actúe como $\psi \mapsto F^{-1} \circ \psi \circ F$. f es biyectiva con inversa $F \circ \phi \circ F^{-1}$ para $\phi \in \text{Aut}(\mathbf{H})$. Además f es un homomorfismo de grupos ya que para ψ_1 y ψ_2 en $\text{Aut}(\mathbf{D})$ $f(\psi_1 \circ \psi_2) = F^{-1} \circ (\psi_1 \circ \psi_2) \circ F = F^{-1} \circ (\psi_1(F^{-1} \circ F) \circ \psi_2) \circ F = f(\psi_1) \circ f(\psi_2)$.

Dado que, tanto F como ψ son homografías, f es una homografía la cual proviene de la multiplicación de las matrices que corresponden a F , a ψ y a F^{-1} .

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Llegando a que M_f la matriz asociada a la homografía f tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tal que } ad - bc > 0$$

□

Lo anterior implica que el grupo $\text{Aut}(\mathbf{H})$ es isomorfo a $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Definición 2.12. Sean $T \cong \mathbb{C}/\Gamma$ y $T_1 \cong \mathbb{C}/\Gamma_1$ y $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ y $\pi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_1$. La aplicación $\psi : U \subset \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_1$ es holomorfa si para todo $z \in \pi^{-1}(U)$ existe una vecindad V de z con $V \subset \pi^{-1}(U)$ y una función holomorfa $\hat{\psi} : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\psi \circ \pi = \pi_1 \circ \hat{\psi}$$

Proposición 2.13. Sean T y T_1 dos toros provenientes de cocientar \mathbb{C} por dos retículos Γ y Γ_1 . Entonces, T y T_1 son isomorfos si y sólo si existe $a \neq 0 \in \mathbb{C}$ tal que: $\Gamma_1 = a\Gamma$.

Demostración. Sean π y π_1 las aplicaciones cocientes de \mathbb{C} a T y T_1 y sea f un isomorfismo de T a T_1 . Debido a que f es un isomorfismo existe una vecindad V y una aplicación holomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \circ \pi = \pi_1 \circ g$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\
\mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Gamma_1
\end{array}$$

Si existe otra aplicación g_1 que valida la anterior ecuación entonces para todo $u \in V$ se tiene que $\pi_1(g(u) - g_1(u)) = \pi_1(g(u)) - \pi_1(g_1(u))$ ya que π_1 es un homomorfismo de grupos. Entonces $\pi_1(g(u) - g_1(u)) = f \circ \pi(u) - f \circ \pi(u) = 0$ y por ende $g(u) - g_1(u) \in \Gamma$, es decir $g - g_1$ es constante ya que toma valores en Γ .

Así, cualquier \hat{g} depende únicamente del valor de g definiendo así una función $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que es localmente holomorfa, y por ende holomorfa ya que f es un isomorfismo. Por construcción, para todo $z \in \mathbb{C}$ existe una vecindad $V \in \mathbb{C}$ y una constante c tal que $\pi_1(\psi(u) + c) = f(\pi(u))$ para todo $u \in V$. Debido a que π_1 es un homomorfismo llegamos a que $f \circ \pi - \pi_1 \circ \psi$ es constante para todo punto en \mathbb{C} . Si definimos $F = \psi + C$ entonces $\pi_1 \circ F = f \circ \pi$. Ahora, si procedemos de la misma forma para f^{-1} , ya que es un isomorfismo, podemos construir una función H de \mathbb{C} en \mathbb{C} tal que $\pi \circ H = f^{-1} \circ \pi_1$.

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi \circ H \circ F &= f^{-1} \circ \pi_1 \circ F = \pi \\
\pi_1 \circ F \circ H &= f \circ \pi \circ H = f \circ f^{-1} \circ \pi_1 = \pi_1
\end{aligned}$$

Lo cual implica que la función $H \circ F$ es de la forma $z \mapsto z + c$ con $c \in \Gamma$, entonces $H \circ F$ es un isomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Si intercambiamos los roles de H y de F encontramos que $F \circ H$ es un isomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} y por ende F es un automorfismo de \mathbb{C} . Como vimos anteriormente existen $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{C}$ tales que F es de la forma $z \mapsto az + b$.

Sea $\alpha \in \Gamma$, entonces:

$$\begin{aligned}
\pi_1(F(\alpha)) &= f(\pi(\alpha)) = f(\pi(0)) = \pi_1(F(0)) \\
\pi_1(F(\alpha) - F(0)) &= 0 \\
a\alpha + b - b &\in \Gamma_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a\Gamma \subset \Gamma_1$. Si hacemos el mismo análisis con H encontramos que $a^{-1}\Gamma_1 \subset \Gamma$ lo cual finaliza la prueba. \square

Proposición 2.14. *El grupo $Aut(\mathbf{T})$, donde \mathbf{T} es el toro, no es discreto.*

Demostración. Sea \mathbf{T} el toro que proviene de cocientar \mathbb{C} por $\Gamma = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Por la proposición 2.13 sabemos que todo $f \in Aut(\mathbb{C})$ induce un automorfismo en \mathbf{T} si y sólo si $a\Gamma = \Gamma$. Considere $a = 1$. Entonces para cada $b \in \mathbb{C}$ se induce un $Aut(T)$, i.e. $b \mapsto [z + b]$. El **ker** de ésta aplicación es Γ ya que $b + \gamma \mapsto [z + b + \gamma] = [z + b]$ con $\gamma \in \Gamma$. Entonces $\mathbb{C}/\Gamma \cong T \subset Aut(\mathbf{T})$. Gracias a la observación 1.12 del primer capítulo en donde se muestra que \mathbf{T} es homeomorfo a $S^1 \times S^1$, \mathbf{T} es continuo, por lo que el grupo $Aut(\mathbf{T})$ no puede ser discreto ya que contiene a un objeto que no es discreto. \square

Habiendo estudiado el grupo de automorfismos para algunas superficies de Riemann con género 0 y 1 (\mathbb{CP}^1 y \mathbf{T} respectivamente) ahora estudiaremos los automorfismos para superficies de género mayor o igual a dos. Para esto requeriremos algunas definiciones y el teorema de Uniformización.

2.2. Teorema de uniformización

A continuación recordaremos un conjunto de definiciones necesarias para enunciar el teorema de uniformización.

Suponga que X y Y son dos espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación continua. Para todo $x \in X$, llamaremos al conjunto $\{p^{-1}(x)\}$ la **fibra** de p sobre x . Suponga ahora que $p : Y \rightarrow X$ es sobreyectiva. Llamaremos a la aplicación p un **cubrimiento** de X si cumple la siguiente característica:

Para todo $x \in X$ existe una vecindad U tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ donde V_j son subconjuntos abiertos disjuntos de Y y todas las aplicaciones $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ son homeomorfismos. Tal p es un particular un homeomorfismo local. Sea $p : Y \rightarrow X$ un cubrimiento. Llamaremos a $p : Y \rightarrow X$ un **cubrimiento universal** de X si satisface la siguiente propiedad: Para todo cubrimiento $(q : Z \rightarrow X)$ y todo $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, existe una única aplicación $f : Y \rightarrow Z$ que preserva las fibras, i.e. $f(p^{-1}(\{x\})) \in q^{-1}(\{x\})$ y además $f(y_0) = z_0$. Llamaremos $\mathbf{Gal}(Y/X)$ al grupo de autormorfismos de Y que preservan las fibras de X .

Sean X y Y dos espacios conexos, Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un cubrimiento. Llamaremos al cubrimiento **galoisiano** si para todo par de puntos y_1 y y_2 con $p(y_1) = p(y_2)$ existe $f \in \mathbf{Gal}(Y/X)$ tal que $f(y_1) = y_2$.

Suponga ahora que X es un espacio topológico y a un punto en X . Sea $\pi_1(X, a)$ el conjunto de clases homótopas de curvas cerradas con punto inicial y final a . Este conjunto forma un grupo bajo la concatenación de caminos [4] al cual llamaremos **grupo fundamental** de X con punto base a . Si suponemos que X es un espacio arcoconexo, entonces existen isomorfismos no canónicos entre el grupo fundamental con base en un punto a y todos los demás puntos de X , ya que existen arcos que los unen. Entonces un espacio topológico arcoconexo X es **simplemente conexo** si $\pi_1(X) = 0$ i.e. si el grupo fundamental de X sólo contiene la identidad.

Teorema 2.15 ([4]). Sean X y Y dos espacios topológicos conexos, Y simplemente conexo y $p : Y \rightarrow X$ un cubrimiento. Entonces p es un cubrimiento universal de X .

Teorema 2.16 (Teorema de uniformización para superficies simplemente conexas [3]). Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces M es equivalente únicamente a una de las siguientes superficies:

a. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

b. \mathbb{C} .

c. $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ la cual es isomorfa a \mathbf{H} , como vimos anteriormente.

Observación 2.17. Es claro que estos casos son mutuamente excluyentes, primero porque \mathbb{CP}^1 es compacto y ni \mathbb{C} ni \mathbb{D} lo son y por el teorema de Liouville no puede existir un isomorfismo entre \mathbb{C} y \mathbb{D} . Además, cabe notar que $a, b, c \in \mathbb{CP}^1$.

Ahora introduciremos el concepto de un grupo de Klein con el fin de mostrar cómo una superficie puede ser representada al cocientar una de las tres superficies del teorema 2.16 por un grupo de Klein característico.

Definición 2.18. Sea G el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann M . Diremos que la acción de G es **completamente discontinua** en M si para todo $x \in M$ existe un abierto U_x tal que

$$\forall g \in G, (g \neq 1) \Rightarrow g(U_x) \cap U_x = \emptyset.$$

Definición 2.19. Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Definiremos **la región de discontinuidad de G** (Ω_G) como el conjunto de $z \in \mathbb{CP}^1$ donde G actúa de manera completamente discontinua.

Proposición 2.20. Ω_G es abierto y G -invariante de \mathbb{CP}^1 .

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega_G$. Como G actúa de manera completamente discontinua en Ω_G entonces existe $U \ni z_0$ tal que para todo $g \neq 1_G$, $gU \cap U = \emptyset$ y por ende $U \subset \Omega_G$ o de lo contrario existiría un $w \in \mathbb{CP}^1 - \Omega_G$ tal que para algún $g \in G$ se tiene que $gU \cap U = \{w\}$.

Ahora veamos que Ω es G -invariante, es decir $G\Omega_G = \Omega_G$.

Sea $z_0 \in \Omega_G$ y $g \in G_{z_0} = \{g \in G \mid gz_0 = z_0\}$ entonces $z_0 = gz_0 \in G\Omega_G$. Sea $y \in G\Omega_G$ entonces existen $g \in G$ y $z_0 \in \Omega_G$ tales que $y = gz_0$. Si $g \in G_{z_0}$ entonces $y = z_0 \in \Omega_G$. De lo contrario, si $g \in G - G_{z_0}$ entonces $h = g^{-1} \in G - G_{z_0}$ y gracias a que $z_0 \in \Omega_G$ entonces existe un abierto $V = gU_{z_0}$ tal que $V \cap hV = \emptyset$ y por ende $y \in \Omega_G$. \square

Definición 2.21. G es un grupo de **Klein** si $\Omega_G \neq \emptyset$.

Proposición 2.22. Sea M una superficie de Riemann y G un subgrupo del grupo de automorfismos de M . Si la acción de G sobre M es completamente discontinua entonces el espacio de órbitas M/G admite una estructura de superficie de Riemann.

Demostración. Primero veamos que $\pi : M \rightarrow M/G$ es un homeomorfismo local. Gracias a que la acción de G sobre M es completamente discontinua para todo $x \in M$ existe un abierto U que contiene a x con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \forall y \in U, (gy \in U) &\Rightarrow (g = 1_G), \\ \forall y \in U, U \cap G \cdot y &= \{y\}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que para todo $x \in M$ existe un abierto U que intersecta una órbita a lo sumo en un punto y por ende π_U es inyectiva. La sobreyectividad de π es evidente ya que todo $y \in M/G$ se escribe de la forma $y = gx$ para algún $g \in G$ y un $x \in M$. Entonces para todo $x \in M/G$ existe un abierto U_x donde π es un homeomorfismo local y además los U_x forman un cubrimiento de M/G .

Ahora construyamos la estructura compleja de M/G . Para cada elemento g de G definiremos la aplicación $g : M/G \rightarrow M/G$ como $x \mapsto gx$. Esta aplicación está bien definida ya que si existe otra aplicación h tal que para un $z \in \pi(U) \in M/G$ si $gz = y$ y $hz \in U$ entonces $gz = (gh^{-1})(hz) \in U$ lo cual implica que $g = h$ ya que G actúa de manera completamente discontinua. Por último, G es un grupo de automorfismos biholomorfos entonces la aplicación $g : x \rightarrow gx$ es holomorfa. Como M es una superficie de Riemann podemos usar las cartas locales de esta para construir las de M/G . Entonces las cartas de M/G están dadas por (U_x, ψ_x) donde $\psi_x := \psi_M \circ \pi_{U_x}^{-1}$ y U_x el abierto que existe en cada punto gracias a que el grupo actúa de manera discontinua. Este atlas cubre a M/G y además las funciones de transición son compatibles ya que M es superficie de Riemann y π es holomorfa y biyectiva en U_x . \square

Observación 2.23. *El ejemplo 1.11 es un caso particular de la proposición 2.22.*

Observación 2.24. *Consideremos ahora, la proyección canónica $\pi : \Omega_G \rightarrow \Omega_G/G$. Por la anterior construcción Ω_G/G es una superficie de Riemann con la proyección π holomorfa.*

Lema 2.25. *Considere la aplicación $p : M \rightarrow M/G$ con G un subgrupo del grupo de automorfismos de M . Sea $x \in M$. Entonces x es un punto de ramificación si y sólo si el estabilizador de x es no trivial.*

Demostración. x es un punto de ramificación de p si y sólo si se tiene que para todo abierto U_x que contiene a x existe un $y \in U_x$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$. Lo cual implica que la acción no es discontinua que a su vez implica que la acción del grupo G no es libre, i.e. x tiene estabilizador no trivial. \square

Proposición 2.26. *Si G es un grupo de Klein, entonces es finito o contable.*

Demostración. Sea $z \in \Omega_G$ tal que G_z sea trivial. Entonces

$$H = \{g(z) : g \in G\}$$

es un subconjunto discreto en Ω_G . Por lo tanto finito o contable. Pero H tiene la misma cardinalidad de G entonces G es finito o contable. \square

Dado que $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ hereda la topología de su inmersión en \mathbb{C}^4 , $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ es un grupo topológico, i.e. las operaciones binarias del grupo y los inversos del grupo son funciones continuas respecto a esta topología. Entonces dado un grupo $G \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$, G es discreto si es discreto como subgrupo del espacio topológico $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Proposición 2.27. *Todo grupo de Klein es discreto.*

Definición 2.28. *Sea G un grupo de Klein. Llamaremos a G un grupo **Fuchsiano** si deja invariante el disco $\mathbf{D} \subset \mathbb{CP}^1$ o el semiplano \mathbf{H} .*

Teorema 2.29 ([3]). *Sea $G \subset \text{Aut}(\mathbf{D})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{D} \subset \Omega_G$.

(b) $\mathbf{D} \cap \Omega_G \neq \emptyset$.

(c) G es discreto.

Observación 2.30. Γ es un grupo Fuchsiano si y sólo si es un subgrupo discreto de $\mathbf{PU}(1,1)$ o un subgrupo discreto $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Proposición 2.31 ([2]). Dos elementos de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ diferentes a la identidad conmutan si y sólo si tienen el mismo conjunto de puntos fijos.

Sea M una superficie de Riemann y $p: \widehat{M} \rightarrow M$ su cubrimiento universal. Dado que p es galoisiano, $G = \text{Gal}(\widehat{M}/M) \cong \pi_1(M)$ y además G actúa discontinuamente en \widehat{M} [3]. Como π es un homeomorfismo local podemos darle una estructura compleja a \widehat{M} utilizando la estructura compleja de M y gracias a la unicidad del cubrimiento universal (salvo isomorfismos de éste) y el teorema 2.15 podemos suponer que \widehat{M} es simplemente conexa.

El teorema 2.16 nos da todos los candidatos para \widehat{M} , i.e. todas las superficies de Riemann simplemente conexas: $\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}$ y $\mathbf{D} \cong \mathbf{H}$. Cada una de estas superficies tiene como grupo de automorfismos un grupo de homografías, los cuales enunciamos anteriormente, estableciendo así una uniformización general.

Teorema 2.32 (Teorema de Uniformización [3]). Toda superficie de Riemann M es isomorfa a N/G con $N = \mathbb{CP}^1, \mathbb{C}$ o $\mathbf{D} (\cong \mathbf{H})$ y G un grupo de homografías, que actúa discontinuamente y sin puntos fijos, que preservan N .

Teorema 2.33. La única superficie de Riemann M que tiene como cubrimiento universal \mathbb{CP}^1 es \mathbb{CP}^1 mismo.

Demostración. Sea $G = \text{Gal}(\mathbb{CP}^1/M)$. G necesariamente tendría que tener puntos fijos si $\pi(M) \neq 0$. □

Teorema 2.34 ([3]). Sea M una superficie de Riemann. Si el cubrimiento universal de M es \mathbb{C} , entonces M es isomorfo a \mathbb{C} , a \mathbb{C}^* , o a un toro.

Los dos teoremas anteriores implican que toda superficie de Riemann, exceptuando las listadas, tienen como cubrimiento universal el disco unitario o equivalentemente el semiplano \mathbf{H} .

Teorema 2.35 ([3]).

1. Las únicas superficies con $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ son isomorfas a \mathbb{C}^* , \mathbf{D}^* o $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < 1\}$.
2. Las únicas superficies con $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ son los toros \mathbb{C}/G , donde G está generado por $z \mapsto z + 1$ y $z \mapsto z + \tau$, $\text{Im}\tau > 0$.
3. Para toda otra superficie M , $\pi_1(M)$ no es abeliano.

El teorema anterior implica que el grupo fundamental de la mayoría de superficies de Riemann es no conmutativo.

Teorema 2.36. *Sea M una superficie de Riemann y sea G un subgrupo de $\text{Aut}(M)$ que actúa de manera completamente discontinua sobre M . Entonces*

$$\text{Aut}(M/G) \cong N(G)/G$$

donde $N(G)$ es el normalizador de G en $\text{Aut}(M)$.

Demostración. Primero observemos lo siguiente. Sea $f \in N(G)$ entonces $g_f := f^{-1}gf \in G$. También sabemos que $\pi \circ g = \pi$ ya que G preserva las fibras de M/G . Entonces,

$$\begin{aligned} \pi &= \pi \circ g \\ \pi &= \pi \circ f \circ g_f \circ f^{-1} \\ \pi \circ f &= \pi \circ f \circ g_f \end{aligned}$$

Si $x = g_f y \in G \cdot y$ entonces

$$\pi \circ f(x) = \pi \circ f \circ g_f(y) = \pi \circ f(y)$$

Por lo tanto podemos afirmar que todo elemento $f \in N(G)$ manda órbitas en órbitas; es decir,

$$\pi(y) = \pi(x) \text{ con } x \in G \cdot y \text{ si y sólo si } (\pi \circ f)(x) = (\pi \circ f)(y)$$

Si $G \cdot y$ es un órbita, $f \in N(G)$ manda $G \cdot y$ en otra órbita $G \cdot x$, lo cual induce una aplicación $\pi_*(f)$ de M/G en él mismo. La aplicación $\pi_*(f)$ está definida por la relación

$$\pi_*(f) \circ \pi = \pi \circ f$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M/G & \xrightarrow{\pi_*(f)} & M/G \end{array}$$

Primero, $\pi_*(f \circ h) = \pi_*(f) \circ \pi_*(h)$ ya que $(\pi_*(f) \circ \pi_*(h)) \circ \pi = (\pi_*(f))(\pi \circ h) = (\pi_*(f) \circ \pi) \circ h = \pi \circ f \circ h$ y $\pi_*(f \circ h) \circ \pi = \pi \circ f \circ h$. Además $\pi_*(1) = 1$ y por ende $\pi_*(f^{-1})$ es el inverso de $\pi_*(f)$. Todo lo anterior implica que $\pi_*(f)$ es un automorfismo de M/G y que π_* es un homomorfismo de $N(G)$ a $\text{Aut}(M/G)$ sobreyectivo, lo cual ya habíamos visto para el caso del toro (ver 2.13).

Ahora veamos que $\ker(\pi_*) = G$. Primero $G \subset \ker(\pi_*)$ ya que para todo $g \in G$ $\pi_*(g) \circ \pi = \pi \circ g = \pi$. Nos falta probar únicamente que $\ker(\pi_*) \subset G$. Sea $f \in \ker(\pi_*)$ y $x \in M$. $\pi_*(f) \circ \pi(x) = \pi \circ f(x) = \pi(x)$ entonces para todo $x \in M$, $fx \in G \cdot x$. Para cada $g \in G$, sea $A(g) = \{x \in M \mid fx = gx\}$. Entonces $M = \bigcup_{g \in G} A(g)$ y gracias a que G actúa discontinuamente sobre M entonces los $A(g)$ son disjuntos. Sea $x \in A(g)$ y sea V un vecindad de x tal que

1. $V \subset U_x$ donde U_x es el abierto que existe gracias a que G actúa discontinuamente en M

$$2. f(V) \subset g(U_x)$$

Si $g \neq h$, $f(V) \cap hV \subset g(U_x) \cap h(U_x) = \emptyset$ nuevamente por que G actúa discontinuamente en M . Entonces V no intersecta ningún $A(h)$ únicamente a $A(g)$ y por ende $A(g)$ es abierto. Como M es la unión de conjuntos $A(g)$ abiertos disjuntos entonces, por ejemplo, $A(g_0)$ es no vacío. Es así que $A(g_0) = \{x \in M | fx = g_0x\} = M$ y $f = g_0 \in G$.

Todo lo anterior implica por el teorema del isomorfismo que:

$$\text{Aut}(M/G) \cong N(G)/G.$$

□

Por último introduciremos un par de definiciones que serán de gran ayuda a la hora de demostrar el teorema de Hurwitz.

Considere G un grupo de Klein y D un subconjunto abierto, conexo y G -invariante de Ω_G . Ahora considere la proyección canónica $\pi : D \rightarrow D/G$ y suponga que ésta se ramifica sobre finitos puntos, entonces diremos que G es de **tipo finito** sobre D . Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el conjunto de puntos en D/G tales que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = p(S_p)$ (ver capítulo 1).

Definición 2.37. Sea G un grupo de Klein y D un subconjunto abierto, conexo y G -invariante de Ω_G . Definimos la **característica de G** con respecto a D como

$$\chi = 2g - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right)$$

siendo g el género de D/G y k_i al coeficiente en la forma normal local en $\pi^{-1}(x_i)$.

Gracias al teorema de Uniformización, toda superficie de Riemann es equivalente a N/G con N una superficie simplemente conexa y G un grupo de acción discontinua que preserva N . Entonces podemos definir un dominio para la acción de G que contenga a los representantes de cada órbita.

Definición 2.38. Sea G un grupo de Klein y sea $D \subset \Omega_G$ un abierto G -invariante. Llamaremos a $\omega \subset \Omega_G$ un **dominio fundamental** de G con respecto a D si cumple lo siguiente:

1. no existen dos puntos en ω equivalentes bajo G ,
2. todo punto de D es G -equivalente al menos un punto en la clausura de ω .

Teorema 2.39 ([3]). Todo grupo de Klein tiene un dominio fundamental.

Ahora, dada una superficie de Riemann, podemos introducir una métrica Riemanniana de curvatura constante (ver [3]). Esto lo hacemos con el fin de **medir** el área de un dominio fundamental y así relacionar la característica de tal superficie con el área de su dominio fundamental.

Para medir el área de un dominio fundamental utilizaremos una triangulación de N/G , ya que estamos considerando superficies compactas y a partir del área de cada triángulo calcularemos el área del dominio fundamental.

Proposición 2.40 ([3]). *El área de un triángulo no euclidiano con ángulos α, β y γ es*

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Teniendo el resultado anterior podemos establecer la relación que estábamos buscando

Teorema 2.41 ([4]). *Sea G un grupo fuchsiano que actúa sobre una superficie de Riemann M . Considere la proyección canónica $p : M \rightarrow M/G$. Entonces*

$$\text{Área}(M/G) = 2\pi\chi(M)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de M con respecto a G .

2.3. Teorema de Hurwitz

En las secciones anteriores hemos visto cómo, para superficies de Riemann compactas de género menor a 2, el grupo de automorfismos no es ni siquiera discreto. Lo interesante es que para superficies de género mayor o igual a 2 este grupo se vuelve finito. A continuación presentamos una prueba al teorema de Hurwitz utilizando dos enfoques. El primero es considerar una superficie como el cociente del semiplano \mathbf{H} por un grupo fuchsiano y el segundo, un tanto más topológico, considerar la superficie como un cubrimiento ramificado de la superficie cociente de G -órbitas, con G el grupo de automorfismos de la superficie. Es importante aclarar que este último fue el enfoque que usó A. Hurwitz [8] en su prueba, ya que los grupos fuchsianos fueron introducidos por Poincaré en 1882 y Hurwitz no hace referencia a estos en su estudio, quizás por desconocimiento de los mismos [8].

Teorema 2.42 (Teorema de Hurwitz). *Sea M una superficie de Riemann compacta conexa de género $g \geq 2$. Entonces $\text{Aut}(M)$ es un grupo finito de orden N con*

$$N \leq 84(g - 1)$$

Demostración. Primero probaremos que $\text{Aut}(M)$ es un grupo finito.

Por el teorema de uniformización y el hecho de que el género de M es mayor o igual a 2, M puede ser representada como \mathbf{H}/Γ donde Γ es un grupo Fuchsiano de acción discontinua sin puntos fijos. Considere ahora la aplicación $\pi : \mathbf{H}/\Gamma \rightarrow \mathbf{H}/N(\Gamma)$ con $N(\Gamma)$ el normalizador de Γ en $\text{Aut}(\mathbf{H})$.

Primero veamos que $N(\Gamma)$ es un grupo Fuchsiano. Suponga que $N(\Gamma)$ no es discreto. Entonces existe una sucesión de $n_i \in N(\Gamma)$ tales que $n_i \mapsto 1_\Gamma$. Para un elemento $\gamma \in \Gamma/\{1_\Gamma\}$, $n_i\gamma n_i^{-1} \mapsto \gamma$ y como Γ es discreto tenemos que $n_i\gamma n_i^{-1} = \gamma$ para todo i suficientemente grande. Ahora, para dos elementos cualesquiera γ y γ' tenemos que tienen el mismo conjunto de puntos fijos que n_i para todo i suficientemente grande y por ende conmutan (ver proposición 2.31). Pero por el teorema 2.35 Γ es un grupo no conmutativo contradiciendo así la suposición de que $N(\Gamma)$ no era discreto. Entonces, $N(\Gamma)$ es Fuchsiano, por el teorema 2.29 $\mathbf{H} \subset \Omega_{N(\Gamma)}$ y entonces $\mathbf{H}/N(\Gamma)$ admite estructura de superficie de Riemann y por ende la aplicación π está bien definida.

Como $\Gamma \subset N(\Gamma)$ al cocientar \mathbf{H} por $N(\Gamma)$ estamos produciendo un dominio fundamental más *pequeño* que el que se produciría al cocientar sólo por Γ . Es decir, la aplicación π se puede ver como una proyección y si la restringimos a abiertos de $\mathbf{H}/N(\Gamma)$, actúa como la identidad lo cual implica que es holomorfa. Debido a que π es holomorfa y \mathbf{H}/Γ es una superficie compacta entonces π se ramifica sobre finitos puntos y por ende $N(\Gamma)$ es de tipo finito sobre \mathbf{H} . Ahora calculemos el grado de la aplicación π . Como lo hicimos en el primer capítulo, llamaremos S_π a los puntos de ramificación de π .

Consideremos primero lo siguiente. Sea X una superficie de Riemann, G el grupo de automorfismos de X y $p : X \rightarrow X/G$ la proyección canónica. Entonces la cardinalidad de la fibra en $x \in (X/G) \setminus p(S_p)$ es igual a la cardinalidad del grupo de automorfismos G ya que los elementos de la fibra $p^{-1}(x) = \{gx : g \in G\}$. Si suponemos ahora que X es una superficie de Riemann compacta y que G actúa de manera discontinua sobre X entonces $|p^{-1}(x)| = |\{gx : g \in G\}|$ es finita.

Retomemos la aplicación $\pi : \mathbf{H}/\Gamma \rightarrow \mathbf{H}/N(\Gamma)$. Como el grado de una aplicación es constante sobre todo $\mathbf{H}/N(\Gamma)$ podemos elegir $x \in (\mathbf{H}/N(\Gamma)) \setminus \pi(S_\pi)$. Entonces tenemos que

$$g_\pi(x) = \sum_{y \in \pi^{-1}(x)} k_y = |\pi^{-1}(x)|.$$

Utilizando el resultado de la consideración anterior concluimos que

$$g_\pi = |N(\Gamma)/\Gamma|.$$

Además \mathbf{H}/Γ es compacto y $N(\Gamma)$ es un grupo Fuchsiano entonces $|\pi^{-1}(x)|$ es finita. Combinando el anterior resultado y el teorema 2.36 obtenemos que

$$|Aut(M)| = |N(\Gamma)/\Gamma| = g_\pi.$$

Ahora probaremos la segunda parte del teorema donde se da una cota para el orden de $Aut(M)$. Sea x un punto de ramificación de π . Por el lema 2.25 el estabilizador de x es no trivial y además el orden del estabilizador es igual a k_x . Ahora, el número de puntos distintos en \mathbf{H}/Γ equivalentes a x bajo $N(\Gamma)$ es $|N(\Gamma) \cdot x|$ y utilizando teoría de grupos obtenemos que

$$|N(\Gamma) \cdot x| = [[N(\Gamma) : \Gamma] : N(\Gamma)_x] = g_\pi / |N(\Gamma)_x| = g_\pi / k_x.$$

Entonces el número de ramificación total es

$$\sum_{i=1}^n \frac{g_\pi}{k_i} (k_i - 1) = g_\pi \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right).$$

Utilizando la relación de Riemann-Hurwitz para el género de superficies obtenemos que

$$\chi(\mathbf{H}/\Gamma) = g_\pi \left[\chi(\mathbf{H}/N(\Gamma)) + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \right]. \quad (2.1)$$

donde χ es la característica respecto al grupo cociente. Como habíamos establecido anteriormente podemos relacionar el área de una superficie con su característica por lo que obtenemos que

$$\frac{\text{Área}(\mathbf{H}/\Gamma)}{2\pi} = g_\pi \frac{\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma))}{2\pi}$$

$$\frac{\text{Área}(\mathbf{H}/\Gamma)}{\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma))} = g_\pi.$$

Consideremos ahora

$$\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma)) = 2\pi \left[2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right].$$

Sabemos que $k_y \geq 2$ o de lo contrario y no sería un punto de ramificación y por ende

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{k_y} < 1$$

De la relación de Riemann-Hurwitz es claro que $g > \gamma$ con g y γ los respectivos géneros de las superficies. Entonces de la ecuación (2.1) obtenemos que

$$2g - 2 = g_\pi \left[2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) \right] \quad y \quad \frac{2g - 2}{g_\pi} = \frac{\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma))}{2\pi} \quad (2.2)$$

Analicemos la ecuación (2.2): Para el análisis podemos suponer que $g_\pi > 1$ y es necesario recordar que estamos considerando superficies con género mayor a 1

I. Si $\gamma \geq 2$

$$2g - 2 \geq 2g_\pi$$

$$\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma)) = \frac{2g - 2}{g_\pi} \geq 2$$

II. Si $\gamma = 1$

$$\frac{2g - 2}{g_\pi} = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i} \right)$$

Si $n = 0$ entonces $g = 1$ lo cual contradice nuestra suposición. Entonces n debe ser mayor a cero y

$$\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma)) = \frac{2g - 2}{g_\pi} = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i} \right) > \frac{1}{2}$$

III. Si $\gamma = 0$

$$\begin{aligned}\frac{2g-2}{g_\pi} &= -2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) \\ 2g-2 &= g_\pi \left[\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - 2 \right]\end{aligned}$$

De lo anterior $n \geq 3$ ya que $2g-2 > 0$ y $g_\pi > 1$

a) Si $n \geq 5$

$$2g-2 = g_\pi \left[\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{k_i}\right) - 2 \right] > g_\pi \left[5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2 \right] > \frac{g_\pi}{2}$$

b) Sea $n = 4$ y suponga que $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4$. Algún k_i debe ser mayor o igual a 3 para cumplir con las suposiciones, entonces

$$\frac{2g-2}{g_\pi} \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 2 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2$$

c) Por último considere $n = 3$. Entonces $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$ y para cumplir las suposiciones necesitamos que $k_2 \geq 3$ y $k_3 > 3$.

Si $k_3 \geq 7$

$$\frac{2g-2}{g_\pi} \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) - 2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} - 2 = \frac{1}{42}$$

Encontramos entonces que

$$\text{Inf} \left\{ \frac{2-2g}{g_\pi} \mid g > 1 \text{ y } g_\pi > 1 \right\} = \frac{1}{42}$$

Por la ecuación (2.1) y el resultado anterior tenemos que

$$\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma)) \geq \frac{2\pi}{42}$$

Para finalizar, por la primera parte sabemos que

$$|\text{Aut}(\mathbf{H}/\Gamma)| = |N(\Gamma)/\Gamma| = g_\pi = \frac{\text{Área}(\mathbf{H}/\Gamma)}{\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma))}$$

Utilizando el resultado del análisis que hicimos para el género de $\mathbf{H}/N(\Gamma)$ y el hecho de que $p : U \rightarrow U/\Gamma$ no tenga puntos de ramificación, lo cual implica que $\text{Área}(\mathbf{H}/\Gamma) = 4\pi(g-1)$ obtenemos que

$$\frac{\text{Área}(\mathbf{H}/\Gamma)}{\text{Área}(\mathbf{H}/N(\Gamma))} \leq 84(g-1)$$

y por ende

$$|Aut(\mathbf{H}/\Gamma)| \leq 84(g-1).$$

□

Definición 2.43. *Sea M una superficie de Riemann compacta con género $g \geq 2$. Diremos que M es una **Superficie de Hurwitz** si el orden del grupo de automorfismos de M es igual a $84(g-1)$.*

Capítulo 3

La cuártica de Klein

3.1. Definición de la cuártica de Klein

En 1878, Felix Klein descubrió [5], luego de estudiar el grupo modular de todas las funciones

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$, el cual es un subgrupo del grupo de isometrías del semiplano \mathbf{H} , una superficie muy interesante que permite diferentes descripciones matemáticas. Permite una descripción algebraica (como curva algebraica), una descripción aritmética (como curva modular), una descripción combinatoria (como un polihedro regular) y la que motiva este capítulo, una descripción geométrica como superficie de Riemann siendo después catalogada como una superficie de Hurwitz por el mismo A. Hurwitz [1893] en el estudio donde enuncia su teorema y hace alusión a la superficie de Klein, la cual alcanza la cota propuesta. Klein llegó a este fascinante objeto estudiando las superficies derivadas de cocientar \mathbf{H} por diferentes subgrupos en $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$, congruentes a la identidad módulo un número natural n . Después de hacerlo para diferentes números encontró que el subgrupo congruente a 7 producía una superficie de género 3, la cual podía ser transformada en sí misma por medio de 168 homografías distintas.

Siendo el objetivo del proyecto estudiar el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann, nos concentraremos en la descripción geométrica de la superficie de Klein pero utilizaremos un resultado derivado de la descripción algebraica. La superficie de Klein es una superficie de Riemann que posee una descripción algebraica definida por una curva de cuarto grado en \mathbb{CP}^2 con coordenadas homogéneas $[x : y : z]$

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Esta curva tiene la particularidad que sus derivadas parciales no se anulan simultáneamente sobre la curva, garantizando así la existencia de una tangente en todo punto, es decir es una curva proyectiva

lisa.

Observación 3.1. Entiéndase \mathbb{CP}^2 como $P(\mathbb{C}^3) = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$.

Teorema 3.2 ([1]). El género de una curva *lisa* se expresa como una función del grado de la curva utilizando la siguiente fórmula

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Observación 3.3. La superficie de Klein, que es una curva algebraica lisa de grado 4, tiene género 3.

Volviendo a la descripción geométrica, primero definiremos el subgrupo $\Gamma'(N)$ con $N \geq 2 \in \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$\Gamma'(N) = \{A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid A \equiv \pm I_2 \pmod{N}\}$$

y luego el subgrupo $\Gamma(N)$

$$\Gamma(N) = \Gamma'(N) / \{\pm I_2\}$$

Entonces la superficie de Klein se puede ver como [5]

$$\mathcal{K} = \mathbf{H} / \Gamma(7).$$

Considerando la descripción de Klein estudiaremos el grupo de homografías $\Gamma(7)$. Primero es importante observar que $\Gamma(7)$ es un subgrupo discreto de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$, entonces $\Gamma(7)$ actúa de manera discontinua sobre \mathbf{H} , y por ende es claro que la consideración anterior de que \mathcal{K} tenga estructura de superficie de Riemann es correcta. (ver proposición 2.22).

3.2. El grupo de automorfismos de la cuártica de Klein

Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{mód } 7} & \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{proyec.} & & \downarrow \text{proyec.} \\ \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \end{array}$$

De ahora en adelante llamaremos \mathbb{F}_7 al campo $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Veamos entonces que ϕ es un homomorfismo de grupos.

Sea $u \in [u] \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ y $v \in [v] \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ entonces $\phi(uv) = uv \pmod{7} = \phi(u)\phi(v)$. Es claro que $\ker(\phi) = \{u \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z}) \mid \phi(u) = I_2 \pmod{7}\} = \Gamma(7)$. Ahora, utilizando el hecho de que de que toda matriz en $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ es producto de matrices de transvección en $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ [1] podemos afirmar que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo y entonces

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(7) \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7).$$

Sabemos también que $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ y por ende $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ es un subgrupo del grupo automorfismos de \mathbf{H} . Entonces por el teorema 2.36 $\text{Aut}(\mathbf{H}/\Gamma(7)) \cong N(\Gamma(7))/\Gamma(7)$.

Considere el $N_{\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})}(\Gamma'(7)) = N_{\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})}(\Gamma'(7)) = \{A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid A\Gamma'(7)A^{-1} = \Gamma'(7)\}$. Pero $A\Gamma'(7)A^{-1} \equiv_7 A \pm I_2 A^{-1} \equiv_7 \pm I_2 \equiv_7 \Gamma'(7)$, entonces $N_{\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})}(\Gamma'(7)) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Ahora $N_{\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})}(\Gamma'(7)/\{\pm I_2\}) = N_{\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})}(\Gamma(7)) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Lo cual implica que

$$\text{Aut}(\mathbf{H}/\Gamma(7)) \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(7) \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7).$$

Veamos ahora cual es la cardinalidad del grupo $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$.

Primero necesitamos establecer la cardinalidad de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)$. Sea $A \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)$. La primera columna de A puede ser cualquier vector menos el vector cero, entonces existen $7^2 - 1$ maneras de escogerlo. La segunda columna puede ser cualquier vector excepto un múltiplo del primer vector ya que necesitamos que sean linealmente independientes para que $\det(A) \neq 0$. Entonces existen $7^2 - 7$ maneras de escogerlo. Concluyendo así que $|\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)| = (7^2 - 1)(7^2 - 7) = 48 \times 42 = 2016$.

Consideremos la aplicación

$$\det : \mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7) \rightarrow \mathbb{F}_7^*$$

la cual es un homomorfismo de grupos ya que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Veamos ahora que es sobreyectiva. Sea $a \in \mathbb{F}_7^*$ y considere la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)$$

entonces

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

y por ende la aplicación \det es un homomorfismo sobreyectivo.

Ahora, el $\ker(\det) = \{A \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7) \mid \det(A) = 1 \pmod{7}\} = \mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)$, entonces por el teorema del isomorfismo tenemos que

$$\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)/\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7) \cong \mathbb{F}_7^*$$

y así

$$|\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)/\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)| = |\mathbb{F}_7^*| = 6.$$

Nuevamente por el teorema del isomorfismo sabemos que $\ker(\det) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ es un subgrupo normal de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ entonces

$$|\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)/\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)| = \frac{|\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)|}{|\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)|} = 6$$

$$|\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)| = \frac{|\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_7)|}{6} = \frac{(7^2 - 1)(7^2 - 7)}{6} = 336$$

y por ende

$$|\mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7)| = \frac{|\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_7)|}{|\{\pm I_d\}|} = \frac{336}{2} = 168.$$

Concluimos entonces que $|\text{Aut}(\mathbf{H}/\Gamma(7))| = |\mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7)| = 168$ implicando así que la superficie de Klein es una superficie de **Hurwitz**.

Por último hay que resaltar el hecho de que el grupo $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ es el segundo grupo simple más pequeño, después del grupo alternante \mathbf{A}_5 que tiene orden $\frac{5!}{2} = 60$.

3.3. Otras superficies que alcanzan la cota de Hurwitz

Aparte del teorema de Hurwitz, que enunciamos en el capítulo anterior, A.Hurwitz [8] provó también que un grupo finito puede ser representado como el grupo de $84(g-1)$ automorfismos de una superficie con género $g \geq 2$ si y sólo si es generado por dos elementos t y u tales que

$$t^2 = u^3 = (tu)^7 = 1.$$

A tales grupos se les llama Grupos de Hurwitz. Entonces el problema de encontrar superficies con $84(g-1)$ automorfismos se redujo netamente a un problema de teoría de grupos. Ahora, los pocos grupos de Hurwitz que se conocen, actúan sobre superficies de género 3, 7, 14 y 17 [5, 7] y de ellos sólo se conocen ecuaciones explícitas (curvas algebraicas) para los dos primeros. Pero también existen construcciones geométricas. Para 1960 A.M. Macbeath demostró, que partiendo de una curva de género g se puede obtener una curva para todo entero m con el número máximo de automorfismos y de género $(g-1)m^{2g}+1$ (ver [6]). Cuatro años más tarde A.M. Macbeath construye explícitamente una curva de género 7, utilizando teoría de grupos fuchsianos, que alcanza el número máximo de automorfismos.

Bibliografía

- [1] *Christophe Bavard. Le surface de Klein. Le journal de maths des élèves, 1(1):13–22, 1993.*
- [2] *Pete L. Clark. Lectures on Shimura curves: General theory of Fuchsian groups. <http://math.uga.edu/~pete/SC2-Fuchsian.pdf>.*
- [3] *H. M. Farkas and I. Kra. Riemann surfaces, volume 71 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.*
- [4] *Otto Forster. Lectures on Riemann surfaces, volume 81 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.*
- [5] *Felix Klein. On the order-seven transformation of elliptic functions. In The eightfold way, volume 35 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., pages 287–331. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. Translated from the German and with an introduction by Silvio Levy.*
- [6] *A. M. Macbeath. On a theorem of Hurwitz. Proc. Glasgow Math. Assoc., 5:90–96 (1961), 1961.*
- [7] *A. M. Macbeath. On a curve of genus seven. Proc. London Math. Soc. (3), 15:527–542, 1965.*
- [8] *A. M. Macbeath. Hurwitz groups and surfaces. In The eightfold way, volume 35 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., pages 103–113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.*
- [9] *William S. Massey. Algebraic topology: an introduction. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.*
- [10] *Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, II. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.*