UN EJEMPLO DE REDUCCIÓN HIPERKÄHLERIANA EN DIMENSIÓN INFINITA

YERUHAM CAMILO ANDRÉS VARGAS CONTRERAS

DIRECTOR: FLORENT SCHAFFHAUSER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MAYO DE 2013

Índice general

Introducción

En este trabajo se pretende mostrar un ejemplo de reducción hiperkähleriana en dimensión infinita. Este ejemplo está motivado por estudiar la geometría diferencial de espacios de módulos surgidos de la geometría algebraica. Este punto de vista fue introducido por Atiyah y Bott [[AB83]] en el estudio de las *Ecuaciones de Yang-Mills*.

En el Capítulo 1 se muestran en detalle los procesos de reducción simpléctica, kähleriana e hiperkähleriana. En todos ellos la herramienta central es el Teorema de Marsden-Weinstein (Teo. 1.1.1). Se muestran ejemplos de estas construcciones y se establece la conmutatividad de dos operaciones: tomar el cotangente a una variedad y aplicar el proceso de reducción a dicha variedad ($\mathbb{C}^{n+1}$).
En el Capítulo 2 aparecen aspectos básicos de la teoría de conexiones en fibrados holomorfos y operadores de Dolbeault. Más aún, consideramos un ejemplo de espacio con estructura kähleriana (en dimensión infinita): el espacio de conexiones unitarias sobre un fibrado hermítico (E, h). Por último, se muestra una acción sobre este espacio que permite considerar reducción (kähleriana) y su conexión con espacios de módulos de fibrados estables (gracias al Teorema de Donaldson).
El capítulo 3 estudia fibrados de Higgs y las Ecuaciones de Hitchin. Se considera el espacio cotangente al espacio de conexiones unitarias con su estructura hiperkähleriana. El hecho más destacado recae en el Teorema de Hitchin, que permite identificar cierto espacio de módulos de fibrados de Higgs como un cociente hiperkähleriano.

Quiero aprovechar estas líneas para agradecer a mi familia por su constante apoyo y especialmente a mi asesor *Florent Schaffhauser*, por su infinita paciencia, entrega y consejería para la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Geometría Kähleriana e Hiperkähleriana

1.1. Reducción simpléctica

El estudio de la geometría simpléctica está motivado históricamente por la física, toda vez que es el escenario ideal donde modelar la mecánica clásica. La idea en estas páginas es detallar los elementos básicos y terminar con el Teorema de Marsden-Weinstein de reducción simpléctica.

Definición 1.1.1. *Una **variedad simpléctica** es una variedad diferenciable M dotada con una forma $\omega \in \Omega^2(M)$ cerrada y no degenerada, en el sentido que para todo $p \in M$ la aplicación $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal no degenerada.*

La no degeneración de ω garantiza que para cada $p \in M$ se tiene que (T_pM, ω_p) es un espacio vectorial simpléctico, luego toda variedad simpléctica tiene dimensión par. Más aún, ω_p induce un isomorfismo canónico

$$\phi_p : \begin{array}{ccc} T_pM & \longrightarrow & T_p^*M \\ X_p & \longmapsto & \phi_p(X_p) \end{array}$$

donde $\phi_p(X_p)(Y_p) := \omega_p(X_p, Y_p)$ para todo $Y_p \in T_pM$. En términos geométricos, una variedad simpléctica es orientable. En efecto, $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \Omega^{2n}(M)$ resulta ser una forma cerrada y no nula en todo punto de M, por lo tanto induce una forma de orientación en M. De hecho, dado que ω^n no es exacta (por el Teorema de Stokes) se tiene que su clase de cohomología en $H^{2n}(M)$ asociada es no nula.

Ejemplo 1.1.2. *El primer ejemplo de variedad simpléctica es* $\mathbb{R}^{2n}$ *con coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, *cuya forma simpléctica es* $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$. *También podemos hacer la identificación* $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ *y de este modo* $\mathbb{C}^n$ *tiene como forma simpléctica asociada* $\omega_{\mathbb{C}} = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$.

Ejemplo 1.1.3. *Consideremos* $\eta = \frac{xdy\wedge dz - ydx\wedge dz + zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ *una 2-forma en* $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ *y denotemos también por* η *a su restricción sobre* S^2. *Si usamos coordenadas cilíndricas en* S^2

$$(x, y, z) = \Phi(\theta, z) = (\sqrt{1 - z^2} \cos\theta, \sqrt{1 - z^2} \sin\theta, z),$$

entonces $\omega = \Phi^*\eta = d\theta \wedge dz$ *es una 2-forma cerrada y no degenerada, por tanto dota a la esfera de una estructura simpléctica. De hecho, la única esfera de dimensión par que admite estructura simpléctica es* S^2. *En efecto, si* $n > 1$ *y* ω *es una 2-forma cerrada en* S^{2n}, *entonces* $\omega = d\eta$ *para alguna 1-forma* η; *por lo tanto*

$$\begin{aligned} vol(S^{2n}) &= \int_{S^{2n}} \omega \wedge \ldots \wedge \omega = \int_{S^{2n}} d(\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta) \\ &= \int_{\partial S^{2n}} \eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta = 0 \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Ejemplo 1.1.4 (Espacios cotangentes)**.** *Sea* X *una variedad de dimensión* n. *Vamos a construir una 2-forma en* $M = T^*X$ *como sigue. Supongamos que tenemos* $(U, x_1, \ldots, x_n)$ *una carta local en* $p \in X$. *Entonces* $dx_1, \ldots, dx_n$ *forman una base para* T_p^*U, *de modo que cualquier* $\alpha \in T_p^*U$ *se puede escribir como*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k.$$

Esto permite definir coordenadas locales $(T^*U, (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n))$ *que constituirán un atlas para* M. *En coordenadas locales, podemos definir*

$$\omega_L := \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k$$

y la estructura simpléctica estará dada (localmente) por $\eta = \sum dy_k \wedge dx_k$. *Claramente es cerrada y no degenerada y más aún, al considerar nuevas coordenadas para* ω_L *se puede ver que en la intersección coinciden, por lo tanto definen una forma global.*

La mecánica clásica puede ser formulada vía mecánica lagrangiana o vía mecánica *hamiltoniana*, en donde una función (que representa la energía total de un sistema) determina la evolución del sistema. Consideremos entonces un sistema Hamiltoniano (M, ω, H), donde (M, ω) es una variedad simpléctica (que sería el espacio de fases del sistema) y $H \in C^\infty(M)$. Como $dH_p \in T_p^*M$, existe un único campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface

$$i_{X_H}\omega = dH \tag{1.1}$$

Tal campo vectorial se conoce como el **campo vectorial Hamiltoniano asociado a** H. La ecuación anterior significa que para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$.

Observación 1.1.5 (Propiedades)**.**

1. *El flujo uniparamétrico generado por X_H y denotado por ϕ_t^H es un simplectomorfismo (es decir, $(\phi_t^H)^*\omega = \omega$). Esto es consecuencia del hecho que $\mathcal{L}_{X_H}\omega = i_{X_H}d\omega + di_{X_H}\omega = di_{X_H}\omega = ddH = 0$.*

2. *$dH(X_H) = (i_{X_H}\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$ por lo tanto X_H es tangente a las curvas de nivel de H.*

Definición 1.1.6. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice **simpléctico** si $i_X\omega$ es una 1-forma cerrada. $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice **hamiltoniano** si $i_X\omega$ es una 1-forma exacta. En este último caso, $i_X\omega = dH$ para alguna función H (que no es única) y se denomina un **Hamiltoniano asociado a** X.*

Obviamente todo campo vectorial Hamiltoniano es simpléctico y recordemos que $\mathfrak{X}(M)$ tiene una estructura de álgebra de Lie. Mas aún, el corchete de Lie de dos campos simplécticos es hamiltoniano. Esto se debe al hecho que

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= di_Xi_Y\omega - i_Xdi_Y\omega - i_Ydi_X\omega + i_Xi_Yd\omega \\ &= di_Xi_Y\omega = di_X(\omega(Y, \_)) = d\omega(Y, X) \end{aligned}$$

por lo tanto $\omega(Y, X)$ es un Hamiltoniano asociado a $[X, Y]$. En particular esto implica que el conjunto de campos simplécticos $\mathfrak{X}^s(M)$ constituye una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ y en efecto $[\mathfrak{X}^s(M), \mathfrak{X}^s(M)] \subset \mathfrak{X}^h(M)$. Por supuesto el corchete de dos campos Hamiltonianos es, de nuevo, Hamiltoniano.

Definición 1.1.7. *El **corchete de Poisson** de $f, g \in C^\infty(M)$ se define como*

$$\{f, g\} := \omega(X_g, X_f).$$

Este corchete satisface la Identidad de Jacobi ($\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$) y es antisimétrico, por lo tanto dota al espacio $C^\infty(M)$ de estructura de álgebra de Lie. Recordemos que el Teorema de Darboux garantiza coordenadas locales en M de tal forma que ω es simplectomórfica a

$$\sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k.$$

Dichas coordenadas (p_k, q_k) son llamadas *coordenadas de Darboux* y permiten escribir el corchete de Poisson como sigue:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \Big).$$

Observación 1.1.8. *La función $\Psi : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $\Psi(f) := X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Es decir, se tiene $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$.*

Demostración. En efecto, para f, g arbitrarias tenemos

$$\begin{aligned} i_{[X_f, X_g]}\omega &= d i_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_f} d i_{X_g} \omega - i_{X_g} d i_{X_f} \omega + i_{X_f} i_{X_g} d\omega \\ &= d i_{X_f} i_{X_g} \omega = d i_{X_f}(dg) = d(dg(X_f)) = d(i_{X_g}\omega(X_f)) \\ &= d(\omega(X_g, X_f)) = d(\{f, g\}) \end{aligned}$$

□

Como vimos anteriormente un sistema Hamiltoniano produce un campo vectorial X_H y por tanto, un grupo 1-paramétrico de transformaciones en M; es decir, una acción de $\mathbb{R}$ en M (llamada **acción Hamiltoniana**). Ahora queremos considerar una acción de un grupo de Lie (que supondremos compacto) G en M, es decir una aplicación

$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \to & Diff(M) \\ g & \mapsto & \phi_g : M \to M \end{array}$$

donde $\phi_g(p) := g \cdot p$ y ver en ese contexto qué es una acción Hamiltoniana.

Definición 1.1.9. *Sea $\phi : G \to Diff(M)$ una acción. Se dice que ϕ es una **acción simpléctica** si ϕ_g es un simplectomorfismo para todo $g \in G$.*

Si $X \in \mathcal{G}$, entonces se generará una acción (local) de $\mathbb{R}$ sobre M determinada por e^{tX}. Tal acción induce naturalmente un vector tangente en cada punto $p \in M$ tomando el inverso aditivo de la derivada de la acción en $t = 0$, por lo tanto se forma un campo vectorial sobre M. Tal campo vectorial es denominado el **campo fundamental asociado a** $X \in \mathcal{G}$ y su descripción explícita está dada por

$$V_{X_p} := -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(e^{tX} \cdot p).$$

Observación 1.1.10. *La aplicación $\Lambda : \mathcal{G} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $\Lambda(X) = V_X$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Es decir, se satisface $[V_X, V_Y] = V_{[X,Y]}$.*

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned}
[V_X, V_Y]_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\phi^{V_X}_{-t}(V_{Y_{\phi^{V_X}_t(p)}}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\phi_{e^{tX}}(V_{Y_{e^{-tX}\cdot p}}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(-\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{tX}e^{sY}e^{-tX} \cdot p\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(-\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{sAd(e^{tX})(Y)} \cdot p\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(V_{Ad(e^{tX})(Y)}\Big) \\
&= V_{[X,Y]_p}
\end{aligned}$$

□

Definición 1.1.11. *Sea $\phi : G \to Diff(M)$ una acción simpléctica de un grupo de Lie G sobre M. Se dice que la acción es* ***hamiltoniana*** *si existe una aplicación*

$$\mu : M \to \mathcal{G}^*$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *Para todo $X \in \mathcal{G}$ la función $\mu^X : M \to \mathbb{R}$ definida por $\mu^X(p) := \langle \mu(p), X\rangle$ tiene como campo hamiltoniano asociado V_X. Es decir, se satisface*

$$d\mu^X = i_{V_X}\omega.$$

2. μ es equivariante. Es decir, para $g \in G, p \in M$ se tiene

$$\mu(\phi_g(p)) = Ad_g^* \mu(p).$$

Observación 1.1.12. *Tal μ definida anteriormente se llama* ***aplicación momento para la acción*** *y la cuádrupla (G, M, ω, μ) se llama un $G-$**espacio hamiltoniano**. Por último, $Ad_g^* : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ corresponde a la representación coadjunta determinada por*

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\to GL(\mathcal{G}^*) \\ g &\mapsto Ad_g^* \end{aligned}$$

y para $\varphi \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G}$ se define $\langle Ad_g^*(\varphi), X \rangle = \langle \varphi, Ad_{g^{-1}}(X) \rangle$.

Una acción hamiltoniana de un grupo de Lie conexo G también puede ser formulada en términos de **aplicaciones co-momento**, a saber una aplicación

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{G} &\to C^\infty(M) \\ X &\mapsto \mu^*(X) = \mu^X \end{aligned}$$

que debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. Para todo $X \in \mathcal{G}$ se tiene que $\mu^*(X)$ es una función con campo hamiltoniano asociado V_X.

2. μ^* es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, para todos $X, Y \in \mathcal{G}$ se tiene $\{\mu^*(X), \mu^*(Y)\} = \mu^*([X, Y])$.

Proposición 1.1.13. μ es una aplicación momento si y solamente si μ^* es una aplicación co-momento.

Notemos que en el caso que $G = \mathbb{R}$ ó S^1 tenemos $\mathcal{G} = \mathbb{R}$. Por lo tanto, para el generador 1 de $\mathcal{G}$ se tiene $\mu^1(p) = \langle \mu(p), 1 \rangle = \mu(p)$ de modo que solo existirá una μ. Además V_X es el campo inducido por la acción. Por lo tanto, una función $\mu : M \to \mathbb{R}$ es aplicación momento si μ es una función hamiltoniana asociada a V_X.

Ejemplo 1.1.14. *Consideremos la acción de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $\phi_t(x, y) = (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t)$. El campo generado por la acción es $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Busquemos una función H de tal forma que $i_X\omega = dH$, recordando que $\omega = dx \wedge dy$. Las ecuaciones que se generan son*

$$\begin{aligned} i_X\omega\Big(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\Big) &= \omega\Big(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\Big) = yb + xa \\ dH\Big(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\Big) &= (H_x dx + H_y dy)\Big(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\Big) = a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

por lo tanto $H(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$.

Ejemplo 1.1.15. *Consideremos la acción de* S^1 *en* S^2 *dada por* $\alpha \cdot (\theta, z) = (\alpha + \theta, z)$. *Su campo vectorial asociado es* $X = \frac{\partial}{\partial\theta}$, *de modo que para que la acción sea hamiltoniana debemos hallar una* μ. *En este caso,* $\omega = d\theta \wedge dz$, *luego*

$$\begin{aligned} i_X\omega\Big(a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z}\Big) &= \omega\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}, a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z}\Big) = b \\ d\mu\Big(a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z}\Big) &= (\mu_\theta d\theta + \mu_z dz)\Big(a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z}\Big) = a\frac{\partial\mu}{\partial\theta} + b\frac{\partial\mu}{\partial z} \end{aligned}$$

de modo que la aplicación momento asociada es $\mu(\theta, z) = z$.

Ejemplo 1.1.16. *Consideremos la acción de* S^1 *sobre* $\mathbb{C}^n$ *dada por* $\theta \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta}z_1, \ldots, e^{i\theta}z_n)$, *cuyo campo vectorial inducido es*

$$X = \sum_{k=1}^{n} i\Big[z_k\frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{z_k}}\Big].$$

Buscaremos una aplicación $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, *recordando que* $\omega = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z_k}$. *Para un campo arbitrario* Y *se tiene*

$$\begin{aligned} d\mu(Y) &= a_1\frac{\partial\mu}{\partial z_1} + \ldots + a_n\frac{\partial\mu}{\partial z_n} + b_1\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z_1}} + \ldots + b_n\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z_n}} \\ i_X\omega(Y) &= \frac{i}{2}\Big[dz_1 \wedge d\bar{z_1}(X,Y) + \ldots + dz_n \wedge d\bar{z_n}(X,Y)\Big] \\ &= \frac{i}{2}\Big(iz_1b_1 + ia_1\bar{z_1} + \ldots + iz_nb_n + ia_n\bar{z_n}\Big) \\ &= -a_1\frac{\bar{z_1}}{2} - \ldots - a_n\frac{\bar{z_n}}{2} - b_1\frac{z_1}{2} - \ldots - b_n\frac{z_n}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto la acción es hamiltoniana, con aplicación momento

$$\mu(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2}\Big[1 - (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)\Big].$$

Terminamos esta sección con el Teorema de Marsden-Weinstein, que permite a partir de una acción de grupo hamiltoniana obtener nuevos espacios simplécticos.

Teorema 1.1.1 (Marsden-Weinstein,74)**.** *Sea* (M, ω, G, μ) *un* $G-$*espacio Hamiltoniano, con* G *compacto. Sea* $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ *la aplicación de inclusión. Supongamos que* G *actúa libremente sobre* $\mu^{-1}(0)$. *Entonces*

1. $M_{red} := \mu^{-1}(0)/G$ *es una variedad.*

2. $\pi : \mu^{-1}(0) \to M_{red}$ *es un* $G-$*fibrado principal.*

3. Existe una única forma ω_{red} *en* M_{red} *que satisface* $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$.

4. ω_{red} *es una forma simpléctica.*

El par (M_{red}, ω_{red}) *se denomina* ***cociente simpléctico o cociente de Marsden-Weinstein*** *y se denota* $M//G$.

Demostración. La prueba se realizará a pasos. Denotemos G_p el estabilizador de p bajo la acción y sea $\mathcal{G}_p = Lie(G_p)$.

1. Veamos que $N = \mu^{-1}(0)$ es una subvariedad regular de M.
   Notemos $d\mu_p$ la derivada de la aplicación momento en $p \in M$. Probemos primero que
   $$Im(d\mu_p) = \mathcal{G}_p^0, Ker(d\mu_p) = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p},$$
   donde A^{ω_p} es el complemento simpléctico de A. En efecto, $d\mu_p(X_p)(Y) = \omega_p(V_{Y\,p}, X_p)$ para cualquier $Y \in \mathcal{G}$, por lo tanto
   $$X_p \in Ker(d\mu_p) \Leftrightarrow X_p \in A^{\omega_p},$$
   donde $A = \{V_{Y\,p}, Y \in \mathcal{G}\}$ que es precisamente $T_p\mathcal{O}_p$. Esto demuestra la segunda propiedad. Para demostrar la primera propiedad primero encontremos $\mathcal{G}_p$. La función
   $$G \xrightarrow{\Phi} M, g \mapsto \phi_g(p)$$
   al restringirse a G_p se vuelve constante (igual a p), de modo que para $Y \in \mathcal{G}_p$
   $$\begin{aligned} 0 = d\Phi_e(Y) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi(e^{tY}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_{e^{tY}}(p) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p \cdot e^{tY} = V_{Y\,p} \end{aligned}$$
   con lo cual queda demostrado que $\mathcal{G}_p = \{Y \in \mathcal{G} \text{ t.q. } V_{Y\,p} = 0\}$. Ahora, la aplicación adjunta a $d\mu_p$ está determinada por
   $$\langle d\mu_p^*(Y), X_p\rangle = \langle d\mu_p(X_p), Y\rangle,$$
   luego $Y \in Ker(d\mu_p^*)$ si y solo si $V_{Y\,p} \in (T_pM)^{\omega_p} = \{0\}$. Por lo tanto demostramos que $Ker(d\mu_p^*) = \mathcal{G}_p$, que es equivalente a la primera propiedad.
   Por último, como G actua de manera libre sobre N, entonces para $p \in N$ se tiene
   $$Im(d\mu_p) = \mathcal{G}_p^0 = \{0\}^0 = \mathcal{G}^*$$
   de modo que por el teorema de valor regular, N es subvariedad regular de M.

2. Ahora vamos a garantizar la existencia de ω_{red}.
   Sea $p \in N$. El hecho que N sea subvariedad garantiza que $Ker(d\mu_p) = T_pN$, lo cual significa que T_pN y $T_p\mathcal{O}_p$ son complementos simplécticos en T_pM y de hecho, $Ker(d\mu_p)$ es un subespacio coisotrópico de T_pM. Esto es equivalente a afirmar que $T_p\mathcal{O}_p \subset (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$. En efecto, si $V_{Y\,p} \in T_p\mathcal{O}_p$ y escogemos $V_{Z\,p} \in T_p\mathcal{O}_p$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} i_{V_{[X,Y]}}\omega = i_{[V_X,V_Y]}\omega &= di_{V_X}i_{V_Y}\omega - i_{V_X}di_{V_Y}\omega - i_{V_Y}di_{V_X}\omega + i_{V_X}i_{V_Y}d\omega \\ &= di_{V_X}i_{V_Y}\omega = di_{V_X}d\mu^Y = d(d\mu^Y(V_X)) = d(\omega(V_Y,V_X)) \end{aligned}$$

   de modo que $\omega_p(V_{Y\,p}, V_{X\,p}) = \mu^{[X,Y]}(p) = 0$ y por ende, $Ker(d\mu_p)$ es subespacio coisotrópico de T_pM. Esto significa que ω induce una forma $[\omega]_p$ en $T_pN/T_p\mathcal{O}_p$ para todo $p \in N$. De hecho, $[\omega]_p := \omega_{red\,p}$ es una forma no degenerada.

3. Para $p \in N = \mu^{-1}(0)$ se tiene que $T_{[p]}M_{red} = T_pN/T_p\mathcal{O}_p$ y por tanto la 2-forma construida en el inciso anterior satisface $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$. Resta ver que es cerrada. En efecto,

$$\pi^*(d\omega_{red}) = d(\pi^*\omega_{red}) = d(i^*\omega) = i^*(d\omega) = 0$$

   y como π^* es inyectiva (puesto que π es sobreyectiva), entonces ω_{red} es cerrada.

$\square$

1.2. Variedades de Kähler

Ahora la idea es agregar información a una variedad, esta vez por medio de una estructura compleja. En este contexto también tiene sentido considerar el cociente simpléctico bajo una acción y lo interesante es que se conserva la estructura Kähleriana.

Definición 1.2.1. *Una **estructura compleja** sobre un espacio vectorial V es una aplicación lineal $J : V \to V$ que satisface $J^2 = -Id$.*

Definición 1.2.2. *Una **variedad casi compleja** consta de una variedad M junto con una estructura compleja J_p en T_pM para cada $p \in M$. Esto determina una sección global $J : M \to End(TM)$, denominada **estructura casi compleja.***

Para llegar a definir una estructura Kähleriana en una variedad simpléctica, requerimos de cierta condición de compatibilidad entre las estructuras simpléctica y compleja, establecida a continuación.

Definición 1.2.3. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y J una estructura casi compleja. Se dice que J es* ***compatible con*** *ω si inducen una métrica Riemanniana en M. Más precisamente, para $p \in M$ la aplicación*

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\mapsto \omega_p(X_p, J_p(Y_p)) \end{aligned}$$

debe ser una aplicación bilineal definida positiva y simétrica. En este caso la tripla (ω, J, g) se llama ***tripla compatible*** *y $g(\_, \_) = \omega(\_, J\_)$.*

Para obtener una variedad compleja a partir de una variedad casi compleja, necesitamos que la estructura compleja permita definir cartas complejas en M. Esto se logra determinando la integrabilidad de J usando el tensor de Nijenhuis y el Teorema de Newlander-Nirenberg. El **tensor de Nijenhuis** sobre (M, J) se define para $X, Y \in TM$ como

$$\mathcal{N}_J(X, Y) := [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y].$$

Teorema 1.2.1 (Newlander-Nirenberg)**.** *[[MS98]] Sea (M, J) una variedad casi compleja. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *M es una variedad compleja.*
- *J es integrable.*
- *$\mathcal{N}_J \equiv 0$*

Definición 1.2.4. *Una* ***variedad de Kähler*** *es una variedad simpléctica (M, ω) junto con una estructura casi compleja compatible con ω e integrable. En este caso ω es denominada* ***forma de Kähler****.*

Ejemplo 1.2.5. *El ejemplo estándar de Kähler es $\mathbb{C}^n$. La forma simpléctica es la establecida en el Ejemplo 1.1.2 y la estructura compleja es multiplicación por $i = \sqrt{-1}$. Bajo estas condiciones la métrica de Kähler está dada por*

$$g = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (dz_k \otimes d\bar{z}_k + d\bar{z}_k \otimes dz_k),$$

y la forma simpléctica será

$$\omega_{\mathbb{C}} = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

Observación 1.2.6. *En general, si V es un espacio vectorial complejo y h es una forma Hermítica, entonces V es una variedad de Kähler. Recordemos que una forma Hermítica satisface $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$ para $v, w \in V$, es $\mathbb{C}-$lineal en la primera componente y además $h(v,v) > 0$ para todo $v \in V$. Así pues, vamos a definir*

$$\begin{aligned} \omega(v,w) &:= Im(h(v,w)) \\ g(v,w) &:= Re(h(v,w)). \end{aligned}$$

Claramente g es simétrica y definida positiva. Con respecto a ω veamos que

$$\begin{aligned} \omega(w,v) &= Im(h(w,v)) = Im(\overline{h(v,w)}) = -Im(h(v,w)) \\ &= -\omega(v,w) \end{aligned}$$

luego es antisimétrica. Por último veamos la condición de compatibilidad con la estructura compleja dada por multiplicación por i:

$$\begin{aligned} \omega(v,w) &= Im(h(v,w)) = Re(-ih(v,w)) = Re(\overline{ih(w,v)}) \\ &= Re(h(v,iw) = g(v,iw). \end{aligned}$$

Los ejemplos más básicos de variedades Kählerianas son los espacios proyectivos. Antes de introducir sus características, vamos a ver que, efectivamente, la estructura Kähleriana se mantiene al realizar el cociente de Marsden-Weinstein de una acción Hamiltoniana sobre una variedad Kähleriana.

Teorema 1.2.2 (Marsden-Weinstein, versión Kähler)**.** *Sea (M, ω, G, μ) un $G-$espacio Hamiltoniano. Supongamos que M es una variedad Kähler y que además la acción de G en M preserva la estructura Kähler. Entonces el cociente simpléctico establecido en el Teorema 1.1.1 posee también una estructura Kähleriana.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{O}_p \subset N$ por la equivarianza de la aplicación momento. Por lo tanto, $T_p\mathcal{O}_p \subset T_pN$ y tiene sentido considerar el subespacio ortogonal (con respecto a la métrica en M) a $T_p\mathcal{O}_p$ en T_pN. Si denotamos tal espacio por $\mathcal{H}_p$, entonces tenemos

$$T_pN = T_p\mathcal{O}_p \oplus \mathcal{H}_p. \tag{1.2}$$

Vamos a ver que el complemento ortogonal (según la métrica) de T_pN en T_pM está dado por $\{JV_X; X \in \mathcal{G}\}$. Recordemos que el gradiente Riemanniano de μ^X, denotado $\nabla\mu^X$, es ortogonal a las curvas de nivel de μ^X, en particular a $N = \mu^{-1}(0)$. Por lo tanto, cualquier vector de T_pN es ortogonal a $\nabla\mu^X$. Ahora bien, también existe el gradiente simpléctico de una función suave f y por definición debe satisfacer

$$\omega(\nabla^{sim} f, Y) = df(Y)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. En este caso, $\nabla^{sim}\mu^X = V_X$ por definición de la aplicación momento. Por último, veamos la relación existente entre los gradientes simpléctico y Riemanniano:

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla^{sim} f, Y) &= df(Y) = g(\nabla f, Y) \\
\omega(\nabla^{sim} f, Y) &= \omega(\nabla f, JY) \\
\omega(\nabla^{sim} f, Y) &= \omega(J\nabla f, -Y) \\
\omega(\nabla^{sim} f + J\nabla f, Y) &= 0
\end{aligned}$$

de modo que

$$\nabla^{sim} f = -J\nabla f.$$

Esto permite inferir que las direcciones normales a T_pN en T_pM están dadas por $\nabla\mu^X = J\nabla^{sim}\mu^X = JV_X$, como se propuso anteriormente.

Esto significa que tenemos la siguiente descomposición de T_pM:

$$T_pM = \mathcal{H}_p \oplus T_p\mathcal{O}_p \oplus JT_p\mathcal{O}_p.$$

Esta descomposición identifica a $\mathcal{H}_p$ como el cociente de dos espacios vectoriales complejos (T_pM es Kähler por hipótesis y $T_p\mathcal{O}_p \oplus JT_p\mathcal{O}_p$ puede ser visto como una complexificación de $T_p\mathcal{O}_p$). Pero la descomposición exhibida en la Ecuación 1.2 identifica a $\mathcal{H}_p$ con $T_{[p]}M_{red}$. Por lo tanto hemos probado que, para todo $p \in N$, $T_{[p]}M_{red}$ es un espacio vectorial complejo. El hecho que la estructura compleja inducida sea integrable se sigue del hecho que la conexión de Levi-Civita en M_{red} se obtiene haciendo proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_p$, que conmuta con la estructura compleja de base. □

Ejemplo 1.2.7 (Espacios Proyectivos). *El espacio proyectivo $\mathbb{C}P^n$ se puede construir mediante cociente simpléctico de la acción descrita en el Ejemplo 1.1.16 sobre $\mathbb{C}^{n+1}$. Pero más aún, este cociente simpléctico es una variedad de Kähler, por el Teorema 1.2.2. En estos espacios, la estructura está dada por la métrica de Fubini-Study, que detallaremos a continuación.*

Consideremos $U_k = \{[z_0 : \ldots : z_n] | z_k \neq 0\}$ *y la función de coordenadas en ese abierto, dada por* $\phi_k([z_0 : \ldots : z_n]) = \Big(\frac{z_0}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big)$. *Entonces la forma de Fubini-Study en* U_k *estará dada por*

$$\omega_k^{FS} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} f_k,$$

donde $f_k(z_0, \ldots, z_n) = \log(|z|^2) - \log(|z_k|^2)$.

Recordemos que la forma de Kähler en $\mathbb{C}^n$ *está dada por* $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} g$, *donde* $g(z_1, \ldots, z_n) = \log(1 + |z|^2)$. *Veamos ahora que,* $\omega_k^{FS} = \phi_k^* \omega$. *Esto será util para probar que la forma* ω^{FS} *pega bien en las intersecciones. En efecto,*

$$\begin{aligned}
\phi_k^* g([z_0 : \ldots : z_n]) &= g(\phi_k([z_0 : \ldots : z_n])) \\
&= g\Big(\frac{z_0}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big) \\
&= \log\Big(\frac{|z_0|^2 + \ldots + |z_{k-1}|^2 + |z_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2}{|z_k|^2} + 1\Big) = \log\Big(\frac{|z|^2}{|z_k|^2}\Big) = f_k
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega_k^{FS} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} f_k = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}(\phi_k^* g) = \phi_k^*\Big[\frac{i}{2}\partial\bar{\partial} g\Big] = \phi_k^*\omega.$$

Para ver que ω^{FS} *está bien definida, supongamos que* U_k, U_l *son dos abiertos coordenados. Entonces*

$$\begin{aligned}
\phi_k \phi_l^{-1}(z_1, \ldots, z_n) &= \phi_k([z_1 : \ldots : z_{l-1} : 1 : z_{l+1} : \ldots : z_n]) \\
&= \Big(\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{1}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big)
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
[\phi_k \phi_l^{-1}]^* g(z_1, \ldots, z_n) &= g(\phi_k \phi_l^{-1}(z_1, \ldots, z_n)) \\
&= g\Big(\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{1}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big) \\
&= \log\Big(1 + \frac{|z_1|^2 \ldots + |z_{k-1}|^2 + |z_{k+1}|^2 + \ldots + 1 + \ldots + |z_n|^2}{|z_k|^2}\Big) \\
&= \log\Big(\frac{1 + |z|^2}{|z_k|^2}\Big) = \log(1 + |z|^2) - \log(|z_k|^2)
\end{aligned}$$

esto lleva a afirmar que

$$[\phi_k\phi_l^{-1}]^*\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}[\phi_k\phi_l^{-1}]^*g = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}(g - \log(|z_k|^2))$$
$$= \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}g = \omega$$

y en consecuencia, en $U_k \cap U_l$ tenemos

$$\omega_k^{FS} = \phi_k^*\omega = \phi_l^*\omega = \omega_l^{FS}.$$

Por último, si denotamos por $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ la proyección canónica, entonces se puede mostrar que

$$p^*\omega^{FS} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(|z|^2).$$

1.3. Geometría hiperkähleriana

El estudio de las variedades hiperkählerianas surge con la clasificación de grupos de holonomia de variedades Riemannianas por parte de Berger (1955) y también en física matemática. Se pretende replicar la estructura de los cuaterniones de Hamilton por medio de estructuras complejas con ciertas condiciones.

Definición 1.3.1. *Una variedad hiperkähleriana es una variedad Riemanniana (M, g) dotada de 3 estructuras complejas I, J, K que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$IJ = K, JK = I, KI = J$.*
2. *$g(IX, IY) = g(JX, JY) = g(KX, KY) = g(X, Y)$ para cualesquiera campos vectoriales X, Y en M.*
3. *Si ∇ denota la derivada covariante de la conexión de Levi-Civita de g, entonces se tiene $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$.*

La condición 2 da lugar a la existencia de una tripla de 2-formas cerradas y antisimétricas definidas como

$$\omega_I(X, Y) := g(X, IY)$$
$$\omega_K(X, Y) := g(X, JY)$$
$$\omega_K(X, Y) := g(X, KY),$$

por lo tanto, g es una métrica de Kähler con respecto a las 3 estructuras. Además, si $\mathcal{I} = aI + bJ + cK$ donde $(a, b, c) \in S^2$, entonces la tripla $(M, g, \mathcal{I})$ también es una variedad Kähler.

Por último, debemos reseñar que toda variedad hiperkähleriana es una variedad compleja con una estructura holomorfa-simpléctica. Esto se debe a que, por ejemplo, la estructura I es integrable y la 2-forma $\omega = \omega_J + i\omega_K$ resulta ser una forma de tipo (2,0) con respecto a I que es cerrada y no degenerada. La misma situación ocurre considerando a J, K como las estructuras complejas. Recíprocamente, el Teorema de Calabi-Yau permite obtener una estructura hiperkähleriana a partir de una variedad compleja compacta con estructura holomorfa-simpléctica [[Hit92]].

El Teorema de Newlander-Nirenberg provee otro criterio para determinar cuándo una variedad es hiperkähleriana, que en principio es más fácil que verificar si las estructuras complejas son constantes bajo la derivada covariante.

Lema 1.3.2. *[[Boa]] Sea (M, g) una variedad Riemanniana dotada de 3 estructuras casi-complejas I, J, K que dejan invariante g y además satisfacen las ecuaciones de los cuaterniones. Entonces M es una variedad hiperkähleriana si y solamente si las 2-formas $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ son cerradas.*

Ejemplo 1.3.3. *Vamos a mostrar la estructura hyperkähleriana de $T^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$. Consideremos $(z, w) \in T^*\mathbb{C}^n$, por lo tanto $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n)$ donde $z_k, w_k \in \mathbb{C}$. Identificaremos $(z, w) = (z_1, w_1, \ldots, z_n, w_n)$. Así pues, definimos*

$$\begin{aligned} I_1(z, w) &= (-iz, -iw) \\ I_2(z, w) &= (i\bar{w}, -i\bar{z}) \\ I_3(z, w) &= (\bar{w}, -\bar{z}). \end{aligned}$$

Claramente $I_k^2 = -1$ y además

$$\begin{aligned} I_1(I_2(z, w)) &= I_1(i\bar{w}, -i\bar{z})) \\ &= (-i^2\bar{w}, i^2\bar{z}) \\ &= (\bar{w}, -\bar{z}) \\ &= I_3(z, w) \end{aligned}$$

Si trabajamos en coordenadas (x_k, y_k), las expresiones para las 2-formas inducidas son

$$\omega_1 = \sum_{k=1}^{2n} dx_k \wedge dy_k$$
$$\omega_2 = \sum_{k=1}^{2n-1} dx_k \wedge dy_{k+1} - dx_{k+1} \wedge dy_k$$
$$\omega_3 = \sum_{k=1}^{2n-1} dx_k \wedge dx_{k+1} - dy_k \wedge dy_{k+1}$$

que claramente son cerradas. Por último recordemos que la métrica está dada por

$$g = \sum_{k=1}^{2n} dx_k \otimes dx_k + dy_k \otimes dy_k.$$

Es natural preguntarse en este contexto si tienen sentido cocientes similares a los construidos en los Teoremas 1.1.1 y 1.2.2. La respuesta es afirmativa y naturalmente implica modificar nuestro concepto de aplicación momento. Supongamos que G es un grupo de Lie que actua sobre (M, g, I, J, K) invariante bajo g y que preserva la tripla de estructuras complejas. Requerimos que exista una aplicación momento asociada a cada una de las 2-formas, es decir, tenemos $\mu_I, \mu_J, \mu_K : M \to \mathcal{G}^*$. Ello es equivalente a tener una **aplicación momento hiperkähleriana**

$$\mu : M \to \mathcal{G}^* \otimes \mathbb{R}^3$$

y en estas condiciones la acción de G en M es llamada **acción hiper-hamiltoniana**. A continuación vamos a ver que, cuando se pueda construir el cociente por una acción hiper-hamiltoniana, éste obtendrá también estructura hiperkähleriana. Esto permite naturalmente obtener nuevos ejemplos de variedades hiperkählerianas.

Teorema 1.3.1 (Marsden-Weinstein, Versión hiperkähleriana)**.** *Sea G un grupo de Lie actuando de forma hiper-hamiltoniana en una variedad hiperkähleriana (M, g, I, J, K). Supongamos que G actúa de manera libre en $N = \mu^{-1}(0)$. Entonces*

1. *N/G es una variedad diferenciable que posee estructura hiperkähleriana.*

2. *Si además M es completa, entonces N/G también.*

N/G se denomina el ***cociente hiperkähleriano*** *de M por la acción de G. Se denota $M///G$.*

Demostración. Vamos a probar que N es una variedad. Para ello necesitamos que $d\mu_p$ sea sobreyectiva en todo $p \in N$. Recordemos que para $V \in T_pM$ y $Y \in \mathcal{G}$ se tiene

$$\begin{aligned} d\mu_p(V)(Y) &:= (d\mu_{I_p}(V)(Y), d\mu_{J_p}(V)(Y), d\mu_{K_p}(V)(Y)) \\ &= (\omega_I(V_{Y_p}, V), \omega_J(V_{Y_p}, V), \omega_K(V_{Y_p}, V)) \\ &= -(g(IV, V_{Y_p}), g(JV, V_{Y_p}), g(KV, V_{Y_p})). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ahora bien, si $V = V_{X_p}$ para algún $X \in \mathcal{G}$, entonces

$$\omega_I(V_{Y_p}, V_{X_p}) = \mu_I^{[X,Y]}(p) = 0$$

y lo mismo ocurre para ω_J, ω_K, donde la igualdad a 0 se debe a que $p \in N$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(IV_{X_p}, V_{Y_p}) = 0 \\ g(JV_{X_p}, V_{Y_p}) = 0 \\ g(KV_{X_p}, V_{Y_p}) = 0 \end{aligned}$$

y esto implica que $T_p\mathcal{O}_p$ es ortogonal a $IT_p\mathcal{O}_p,\ JT_p\mathcal{O}_p,\ KT_p\mathcal{O}_p$. Más aún, por invarianza de g los 4 subespacios son mutuamente ortogonales. La aplicación $d\mu_p$ envía

- $IT_p\mathcal{O}_p$ a $(\star, 0, 0)$.
- $JT_p\mathcal{O}_p$ a $(0, \star, 0)$.
- $KT_p\mathcal{O}_p$ a $(0, 0, \star)$.

En efecto, para $Y \in \mathcal{G}$ arbitrario

$$\begin{aligned} d\mu_p(IV_{X_p})(Y) &= -(-g(V_{X_p}, V_{Y_p}), g(JIV_{X_p}, V_{Y_p}), g(KIV_{X_p}, V_{Y_p})) \\ &= (g(V_{X_p}, V_{Y_p}), -g(KV_{X_p}, V_{Y_p}), g(JV_{X_p}, V_{Y_p})) \\ &= (g(V_{X_p}, V_{Y_p}), 0, 0). \end{aligned}$$

Cálculos análogos se hacen para probar las otras 2 afirmaciones. Por lo tanto hemos probado que $d\mu_p$ es sobreyectiva en todo punto $p \in N$ y esto implica que N es variedad. Como G actúa de manera libre en N, el espacio cociente adquiere estructura de variedad diferenciable.

Mostraremos como surge la estructura hiperkähleriana en N/G. Es claro que $Ker\ d\mu_p = T_pN$ y por equivarianza tenemos $T_p\mathcal{O}_p \subset T_pN$. Denotemos por $\mathcal{H}_p$ el complemento ortogonal de $T_p\mathcal{O}_p$ en T_pN. Recordemos que $Ker\ d\mu_p$, por la ecuación 1.3, es el complemento ortogonal de $IT_p\mathcal{O}_p \oplus JT_p\mathcal{O}_p \oplus KT_p\mathcal{O}_p$ en T_pM. Es decir, se tiene la siguiente descomposición:

$$T_pM = \mathcal{H}_p \oplus T_p\mathcal{O}_p \oplus IT_p\mathcal{O}_p \oplus JT_p\mathcal{O}_p \oplus KT_p\mathcal{O}_p.$$

Dicha descomposición permanece invariante bajo I, J, K y por lo tanto permite obtener una presentación de $\mathcal{H}_p$ como un espacio vectorial complejo con 3 estructuras casi complejas I', J', K' que dejan invariante g. Así pues, lo único que falta para garantizar la estructura hiperkähleriana de N/G es demostrar que las 2-formas inducidas son cerradas (haciendo uso del Lema 1.3.2). En efecto, dado que ω_I' satisface $\pi^*\omega_I' = i^*\omega_I$, entonces

$$\pi^* d\omega_I' = d(\pi^*\omega_I') = d(i^*\omega_I) = i^*(d\omega_I) = 0$$

y por consiguiente ω_I' es cerrada. Lo mismo ocurre cambiando I por J, K. $\square$

Vamos a terminar este capítulo con otro ejemplo de variedades hiperkählerianas, que a pesar de ser básico refleja la riqueza de esta nueva estructura. Nos referimos al espacio cotangente del espacio projectivo complejo $T^*\mathbb{C}P^n$. Se obtiene por reducción *hiperkähleriana* de $T^*\mathbb{C}^n$ por cierta acción de S^1. Este ejemplo presenta un caso históricamente particular; es el espacio de Eguchi-Hanson, que fue el primer ejemplo no trivial de variedad hiperkähleriana.

Consideremos la acción de S^1 sobre $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ dada por

$$\phi : \begin{array}{ccc} S^1 \times T^*\mathbb{C}^{n+1} & \to & T^*\mathbb{C}^{n+1} \\ (e^{i\theta}, (z, w)) & \mapsto & (e^{i\theta} z, e^{-i\theta} w) \end{array}$$

Entonces las aplicaciones momento asociadas a las 2-formas $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ están dadas por

$$\begin{aligned} \mu_I(z, w) &= \frac{1}{2}(\|z\|^2 - \|w\|^2) \\ \mu_J(z, w) &= Re(z \cdot w) \\ \mu_K(z, w) &= -Im(z \cdot w) \end{aligned}$$

y por ende el cociente hiperkähleriano en el punto $(1/2, 0, 0)$ está dado por

$$\{(z, w) : \|z\|^2 - \|w\|^2 = 1, z \cdot w = 0\}/S^1.$$

Ahora bien, dados (z, w) con $z \neq 0$ siempre existe $t > 0$ tal que $t^2\|z\|^2 - t^{-2}\|w\|^2 = 1$; esto permite identificar el cociente anterior con el siguiente cociente:

$$\{(z, w) : z \neq 0,\ z \cdot w = 0\}/\mathbb{C}^*$$

que a su vez es equivalente a especificar un elemento $Z \in \mathbb{C}P^n$, un punto $z \neq 0$ de ésa línea y un α con $\alpha(z) = 0$. Es decir,

$$\{(Z, z \otimes \alpha) : Z \in \mathbb{C}P^n, z \in Z, \alpha(Z) = 0\}.$$

Por último, enunciaremos un resultado general sobre variedades Grasmannianas, sin demostración, que nos muestra claramente la descripción de $T^*\mathbb{C}P^n$.

Lema 1.3.4 ([Kob87])**.** *Denotemos $M = Gr_k(V)$ la Grasmanniana de subespacios k-dimensionales complejos de V. Sea $W \subset V$ uno de estos subespacios. Entonces $T_W M = Hom(W, V/W)$ y por lo tanto*

$$T^*_W M = W \otimes W^\circ,$$

donde W° denota el subespacio anulador de W en W^*.

El proceso de reducción, independiente de la estructura de la variedad base, formaliza la idea de asociar cantidades conservadas a grupos de simetría de un sistema físico; ésto se conoce como el *Principio de Noether*. El hecho de encontrar grupos de simetría de un sistema permite reducir la dimensión del espacio de configuraciones del mismo y da lugar a nueva información. En particular, siempre se garantiza que la estructura original se preserva en el espacio cociente.

En general el espacio cotangente de una variedad kähleriana no posee estructura hiperkähleriana. En dimensión finita, los ejemplos mostrados a lo largo de este capítulo si satisfacen dicha propiedad. Iniciamos con $\mathbb{C}^{n+1}$ y a partir de él se obtuvo $\mathbb{C}P^n$ por medio de cociente kähleriano usando una acción de S^1. Pero $T^*\mathbb{C}^{n+1}$ tiene estructura hiperkähleriana y admite una acción de S^1 hiperhamiltoniana cuya reducción nos brinda una descripción de $T^*\mathbb{C}P^n$. En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} \arrow[r, "red."] \arrow[d, "cot."'] & \mathbb{C}P^n \arrow[d, "cot."'] \\
T^*\mathbb{C}^{n+1} \arrow[r, "red."] & T^*\mathbb{C}P^n.
\end{tikzcd}$$

Capítulo 2

Módulos de fibrados vectoriales semiestables y Teorema de Donaldson

En este aparte se mostrará como los conceptos del capítulo 1 permiten una conexión poderosa y útil entre la geometría algebraica y la geometría compleja. A saber, el Teorema de Donaldson permite describir un espacio construido desde la geometría algebraica como un cociente, en el sentido del Teorema de Marsden-Weinstein. Por consiguiente, debemos hablar de conexiones unitarias sobre un fibrado vectorial y de espacios de módulos; tales conceptos serán aclarados a lo largo de esta parte de la tésis.

2.1. Espacios de módulos de fibrados vectoriales

La motivación para los contenidos de este capítulo recae en un problema central en matemáticas: clasificar objetos. Estamos interesados en clasificar fibrados vectoriales sobre una superficie de Riemann Σ_g compacta de género g. Es conocida dicha clasificación para $g = 0, 1$ debida a Grothendieck [[HSW99]] y Atiyah [[Ati57]]. Para $g > 1$ no se conocen teoremas de clasificación, pero a cambio de ello podemos estudiar la geometría de los *espacios de módulos*. Un espacio de módulos es un espacio cuyos elementos representan clases de isomorfismo de ciertos objetos que tienen en común ciertas propiedades. Para el contexto de este escrito los objetos son fibrados vectoriales holomorfos y los invariantes discretos corresponden al grado y al rango.

La *Teoría Geométrica de Invariantes (TGI)*, desarrollada por D. Mumford [[MFK93]], ayuda en la construcción de cocientes en geometría algebraica y por ende, en la construcción de espacios de módulos. No especificaremos detalles de la Teoría Geométrica de Invariantes y referimos a [[Sch08]] para mayores detalles. Lo que sí mencionaremos es que la construcción de un espacio de módulos implica escoger un conjunto adecuado de objetos de tal forma que el espacio de módulos tenga estructura de variedad proyectiva, o al menos casiproyectiva. Esto lleva a considerar, desde el punto de vista de TGI, objetos *semiestables*.

En el contexto de fibrados vectoriales de tipo topológico fijo (grado y rango fijos), la noción de estabilidad viene determinada por la **pendiente** de un fibrado. Recordemos que para un fibrado $\mathcal{E}$, se define $rnk(\mathcal{E})$ como la dimensión de la fibra de $\mathcal{E}$ y $deg(\mathcal{E})$ se define como la integral de $c_1(\mathcal{E})$, la primera clase de Chern de $\mathcal{E}$.

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{E} \to \Sigma_g$ un fibrado vectorial complejo. Su* ***pendiente*** *se define por*

$$\mu(\mathcal{E}) := \frac{deg(\mathcal{E})}{rnk(\mathcal{E})}.$$

La noción de estabilidad determinada por la pendiente está relacionada con los subfibrados no triviales de $\mathcal{E}$; de ahora en adelante esta expresión hará referencia a un subfibrado distinto de 0 y de $\mathcal{E}$.

Definición 2.1.2. *Un fibrado vectorial holomorfo $\mathcal{E} \to \Sigma_g$ se denomina*

1. ***Estable*** *si para todo subfibrado $\mathcal{F}$ holomorfo no trivial se tiene $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$.*

2. ***Semiestable*** *si para todo $\mathcal{F}$ subfibrado no trivial holomorfo se satisface $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.*

Claramente todo fibrado estable es semiestable y si un fibrado semiestable $\mathcal{E}$ tiene $(deg(\mathcal{E}), rnk(\mathcal{E})) = 1$, entonces $\mathcal{E}$ es de hecho estable. Se puede obtener un espacio de módulos de fibrados semiestables por medio de cocientes desarrollados en la TGI [[Sch08]]. El siguiente resultado permitirá comprender mejor los fibrados semiestables.

Teorema 2.1.1 (Filtración de Jordan-Hölder)**.** *[[Ses67]] Todo fibrado holomorfo semiestable $\mathcal{E}$ admite una filtración*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

en donde $\mathcal{E}_j$ son subfibrados y satisfacen, para $j \geq 1$,

1. *$\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}$ es estable.*

2. $\mu(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}) = \mu(\mathcal{E})$.

En este caso tal filtración se llama ***filtración de Jordan-Hölder de longitud*** k.

Demostración. Remitirse a [[Ses67]] para detalles de la prueba. □

Claramente todo fibrado estable $\mathcal{E}$ tiene una filtración de Jordan-Hölder de longitud 1, a saber $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$. Si bien la filtración de Jordan-Hölder no es única, el siguiente resultado abre el panorama para definir apropiadamente ciertos espacios de módulos.

Proposición 2.1.3. Dos filtraciones de Jordan-Hölder asociadas a un fibrado semiestable $\mathcal{E}$ tienen la misma longitud

$$\begin{aligned} (S) &\ : 0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E} \\ (S') &\ : 0 = \mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}'_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}'_l = \mathcal{E} \end{aligned}$$

Es decir, $k = l$. Además, sus objetos graduados correspondientes, definidos por

$$\begin{aligned} gr(S) &:= \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_k/\mathcal{E}_{k-1} \\ gr(S') &:= \mathcal{E}'_1/\mathcal{E}'_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}'_k/\mathcal{E}'_{k-1} \end{aligned}$$

satisfacen, para $j \geq 1$,

$$\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1} \simeq \mathcal{E}'_j/\mathcal{E}'_{j-1}.$$

Demostración. Ver [[Ses67]]. □

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.4. *Un fibrado vectorial holomorfo $\mathcal{E}$ se dice* ***poliestable*** *si es isomorfo a una suma directa de fibrados estables que tienen igual pendiente que $\mathcal{E}$.*

Es decir, $\mathcal{E}$ es poliestable si

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_k.$$

Notemos que dada una filtración de Jordan-Hölder de $\mathcal{E}$ semiestable, su objeto graduado asociado es un fibrado poliestable. De hecho, $gr(\mathcal{E})$ es una clase de isomorfismo graduada de fibrados poliestables. Para describir el conjunto de módulos de fibrados semiestables hace falta describir un espacio apropiado de clases. Eso se logra con la siguiente definición.

Definición 2.1.5 (S-equivalencia)**.** *Dos fibrados semiestables $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ son* ***S-equivalentes*** *si $gr(\mathcal{E}) = gr(\mathcal{E}')$. Se denomina* ***S-clase de equivalencia de*** *$\mathcal{E}$ a la clase $gr(\mathcal{E})$.*

Ahora estamos preparados para definir apropiadamente espacios de módulos en este contexto. El primero de ellos corresponde al **espacio de módulos de fibrados holomorfos semiestables de tipo topológico fijo**, denotado $\mathcal{M}(r,d)$. Se define como el conjunto de clases de S-equivalencia de fibrados semiestables holomorfos de rango r y grado d. Un resultado de Seshadri muestra que no es posible dotar de estructura algebraica al espacio de clases de isomorfismo de fibrados semiestables; es por esto que se toman clases de S-equivalencia. Este espacio puede ser visto también como el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados holomorfos poliestables y esta consideración será importante desde el punto de vista de la geometría diferencial de este espacio de módulos.

El **espacio de módulos de fibrados holomorfos estables de tipo topológico fijo** (denotado $\mathcal{N}(r,d)$) es, por definición, el espacio de clases de isomorfismo de fibrados estables. De hecho, Mumford [[Mum63]] demostró que dicho espacio posee estructura de variedad suave casiproyectiva de dimensión $r^2(g-1)+1$. Posteriormente, Seshadri [[Ses67]] probó que $\mathcal{N}(r,d)$ es una subvariedad abierta y densa de $\mathcal{M}(r,d)$, además de mostrar que $\mathcal{M}(r,d)$ es una variedad proyectiva de dimensión $r^2(g-1)+1$. Por consiguiente, si tenemos $(deg(\mathcal{E}), rank(\mathcal{E})) = 1$ entonces la relación de S-equivalencia coincide con la relación de isomorfía, de modo que ambos espacios son iguales.

2.2. Conexiones unitarias sobre fibrados vectoriales

Como veremos al final de este capítulo, la estabilidad de un fibrado vectorial está relacionada con la curvatura de una conexión. Esto nos lleva a discutir sobre operadores de Dolbeault, conexiones unitarias y sus propiedades básicas. Recordemos que si E es un fibrado sobre M, entonces $\Omega^k(M;E)$ denota el espacio de $k-$formas diferenciales con valores en E.

Definición 2.2.1. *Sea M una variedad compleja y E un fibrado suave complejo de rango r sobre M. Una* ***conexión*** *en E es una aplicación*

$$D : \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$$

que es $\mathbb{C}-$lineal y que además satisface, para $s \in \Omega^0(M;E), f \in C^\infty(M)$

$$D(fs) = (df)s + f(Ds).$$

Localmente, una conexión está determinada por una matriz de 1-formas. Para ver esto, consideremos un *marco local* en un abierto $U \subset M$; es decir, $s_1, \ldots, s_r \in \Omega^0(U;E)$ con la condición que $\{s_i(x)\}$ es base de E_x para todo $x \in U$. Entonces

$$Ds_i = \sum_{j=1}^{r} s_j \omega_i^j,$$

donde $\omega_i^j \in \Omega^1(U;\mathbb{R})$. En notación vectorial $Ds = \omega s$. Si $\xi = \sum \xi_i s_i$ es una sección arbitraria, entonces

$$\begin{aligned}
D\xi &= \sum_i D(\xi_i s_i) = \sum_i (d\xi_i)s_i + \xi_i(Ds_i) \\
&= \sum_i (d\xi_i)s_i + \sum_{i,j} \xi_i s_j \omega_i^j \\
&= d\xi + \omega\xi
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que tenemos otro marco local $s' = (s'_1, \ldots, s'_r)$ en U, entonces existe una matriz A invertible tal que $s' = As$. Así pues, si ω' denota la matriz asociada a D con respecto a s', entonces

$$\begin{aligned}
\omega' s' &= D(s') = D(As) = d(A)s + AD(s) \\
&= d(A)A^{-1}s' + A\omega s = d(A)A^{-1}s' + A\omega A^{-1}s' \\
&= (d(A)A^{-1} + A\omega A^{-1})s'
\end{aligned}$$

de modo que $\omega' = A\omega A^{-1} + (dA)A^{-1}$.

Una conexión en un fibrado vectorial puede extenderse a una aplicación

$$D : \Omega^k(M;E) \to \Omega^{k+1}(M;E),$$

definiendo para $s \in \Omega^0(M;E), \eta \in \Omega^k(M)$,

$$D(s\eta) := Ds \wedge \eta + sd\eta.$$

Definición 2.2.2. *Sea D una conexión en un fibrado E. La* ***curvatura de*** *D se define como*

$$F_D := D \circ D : \Omega^0(M;E) \to \Omega^2(M;E).$$

Nuevamente podemos describir la curvatura de manera local. En un marco s, donde la matriz de conexión es ω, si Ω denota la *forma de curvatura* en dicho marco local, entonces

$$\begin{aligned}\Omega s &= D(Ds) = D(\omega s) = (d\omega)s + \omega(Ds)\\ &= (d\omega)s + \omega \wedge \omega s.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. En particular, derivando la relación anterior obtenemos la *identidad de Bianchi*: $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$. Si s' es otro marco local y Ω' es la respectiva forma de curvatura, entonces

$$\begin{aligned}\Omega' s &= D(Ds') = D(D(As)) = D(dAs + A(Ds))\\ &= da \wedge Ds + AD(Ds) + sd(dA) + Ds \wedge dA\\ &= A\Omega s = A\Omega A^{-1} s'\end{aligned}$$

luego $\Omega' = A\Omega A^{-1}$. Por último, debemos reseñar que la curvatura es una aplicación $C^{\infty}(M)-$lineal; en efecto, para $g \in C^{\infty}(M), s \in \Omega^0(M; E)$ se tiene

$$\begin{aligned}F_D(gs) &= D(D(gs)) = D((dg)s + g(Ds)) = Ds \wedge dg + sd(dg) + dg \wedge Ds + gD(Ds)\\ &= gF_D(s)\end{aligned}$$

por lo tanto, podemos ver F_D como un elemento de $\Omega^2(M; EndE)$. Ahora probaremos un resultado importante sobre el espacio de conexiones sobre E.

Observación 2.2.3. *El espacio de conexiones sobre un fibrado suave complejo E es un espacio afin, cuyo grupo de translaciones es $\Omega^1(M; EndE)$.*

Demostración. Sean D_1, D_2 conexiones. Entonces para $f \in C^{\infty}(M), s \in \Omega^0(M; E)$ se tiene

$$\begin{aligned}(D_1 - D_2)(fs) &= D_1(fs) - D_2(fs) = (df)s + fD_1 s - (df)s - f(D_2 s)\\ &= f(D_1 - D_2)s\end{aligned}$$

es decir que $D_1 - D_2$ es una aplicación de $\Omega^0(M; E)$ en $\Omega^1(M; E)$ que es $C^{\infty}(M)-$lineal. Por último, cualquier aplicación $\varphi : \Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E)$ que es $C^{\infty}(M)-$lineal induce un elemento $\eta \in \Omega^1(M; EndE)$ definido, para $p \in M, v \in T_pM$ como

$$\begin{aligned}\eta_p(v) : E_p &\to E_p\\ a &\mapsto \varphi(s)_p(v)\end{aligned}$$

donde $s(p) = a$. Por lo tanto, la observación queda probada. $\square$

Ahora bien, supongamos que E es un fibrado suave complejo sobre M. Entonces, si $\Omega^{1,0}(M;E)$ denota el espacio de 1-formas $\mathbb{C}-$lineales y $\Omega^{0,1}(M;E)$ el espacio de 1-formas $\mathbb{C}-$antilineales, entonces

$$\Omega^1(M;E) = \Omega^{1,0}(M;E) \oplus \Omega^{0,1}(M;E)$$

y por lo tanto una conexión D sobre $\mathcal{E}$ se descompone como $D = D' + D''$, donde

$$\begin{aligned} D' &: \Omega^0(M;E) \to \Omega^{1,0}(M;E) \\ D'' &: \Omega^0(M;E) \to \Omega^{0,1}(M;E). \end{aligned}$$

En particular, $D''(fs) = fD''s + \bar{\partial} fs$, donde $\bar{\partial}$ corresponde a la parte $\mathbb{C}-$antilineal de df. Tal operador $\bar{\partial}$ es un ejemplo de un **operador de Dolbeault**.

Definición 2.2.4. *Un **operador de Dolbeault** en un fibrado suave E sobre M es una aplicación*

$$D'' : \Omega^0(M;E) \to \Omega^{0,1}(M;E)$$

que es $\mathbb{C}-$lineal y que satisface, para $f \in C^\infty(M), s \in \Omega^0(M;E)$

$$D''(fs) = f(D''s) + \bar{\partial} fs.$$

De manera análoga a la Observacion 2.2.3 se tiene la siguiente afirmación:

Observación 2.2.5. *El conjunto de todos los operadores de Dolbeault sobre E (denotado $Dol(E)$) es un espacio afín, cuyo grupo de translaciones es $\Omega^{0,1}(M; EndE)$.*

Ahora vamos a mostrar porque hemos introducido estos conceptos para estudiar fibrados holomorfos sobre una superficie de Riemann Σ_g. El **grupo Gauge complejo** (que por definición es el grupo de todos los automorfismos complejos lineales de E) actúa en $Dol(E)$ como sigue: si $g \in \mathcal{G}_E$ y $D'' \in Dol(E)$, entonces

$$(g \cdot D'')(s) := g(D''(g^{-1}s)),$$

que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} (g \cdot D'')(s) &= g(g^{-1}D''s + D''(g^{-1})s) \\ &= D''s + gD''(g^{-1})s = D''s - gg^{-1}D''(g)g^{-1}s \\ &= D''s - (D''g)g^{-1}s \end{aligned}$$

La acción está bien definida, puesto que para $f \in C^\infty(\Sigma_g)$ se tiene

$$\begin{aligned}(g \cdot D'')(fs) &= D''(fs) - (D''g)g^{-1}fs \\ &= \bar{\partial} fs + fD''s - f(D''g)g^{-1}s \\ &= \bar{\partial} fs + f[D''s - (D''g)g^{-1}s] \\ &= \bar{\partial} fs + f[(g \cdot D'')(s)]\end{aligned}$$

El espacio de órbitas de $Dol(E)$ bajo la acción de $\mathcal{G}_E$ está en biyección con el espacio de clases de isomorfismo de estructuras complejas y por ende, con el espacio de clases de isomorfismo de fibrados holomorfos. Este hecho se debe a los siguientes resultados.

Teorema 2.2.1. *Sea E un fibrado suave complejo sobre Σ_g. Supongamos que hemos fijado una estructura holomorfa en E y denotemos $\mathcal{E}$ el correspondiente fibrado holomorfo. Entonces existe una única $\mathcal{G}_E-$órbita de operadores de Dolbeault en E de tal forma que para todo D'' en dicha órbita, las secciones holomorfas de $\mathcal{E}$ están en biyección con soluciones locales de $D''s = 0$.*

Demostración. Sea s una sección global de $\mathcal{E}$. Sabemos que si (U_α, ϕ_α) es una cubierta trivializante para E, entonces $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$, donde $g_{\alpha\beta}$ es holomorfa. Por lo tanto,

$$\bar{\partial} s_\alpha = \bar{\partial}(g_{\alpha\beta}s_\beta) = \bar{\partial} g_{\alpha\beta}s_\beta + g_{\alpha\beta}\bar{\partial} s_\beta = g_{\alpha\beta}\bar{\partial} s_\beta,$$

lo cual permite definir una aplicación $D'' : \Omega^0(\Sigma_g; E) \to \Omega^{0,1}(\Sigma_g, E)$ dada por $D''|_{U_\alpha}(s) = \bar{\partial} s_\alpha$ y que además satisface la regla de Leibniz. Supongamos ahora que s es una sección local en U y sea f una función con soporte contenido en U. Por definición existe $V \subset U$ abierto en el cual $f \equiv 1$. Entonces $s|_V$ es holomorfa si y solo si $\bar{\partial} s|_V = D''|_V(s) = 0$. Podemos extender s a Σ_g usando la función f y asi $D''|_V(s)$ no depende de la extensión. Por lo tanto, una sección local s en U es holomorfa si y solo si $D''s = 0$. Estructuras holomorfas isomorfas corresponden a operadores de Dolbeault que viven en la misma órbita. □

Teorema 2.2.2 (Newlander-Nirenberg)**.** *Sean E un fibrado suave complejo sobre Σ_g y $D'' \in Dol(E)$. Entonces existe una única estructura holomorfa en E tal que las secciones holomorfas del fibrado holomorfo $\mathcal{E}$ están en biyección con soluciones locales a $D''s = 0$.*

Demostración. Ver [[Sch]] □

Para estudiar el conjunto de operadores de Dolbeault, necesitamos enriquecer la estructura del fibrado con una estructura *hermítica*. Esto nos ayuda a obtener una primera descripción del espacio de módulos de fibrados poliestables desde la geometría diferencial.

Definición 2.2.6. *Sea E un fibrado suave complejo sobre una variedad M. Una* ***métrica Hermítica*** *en E es una familia de productos hermíticos en las fibras de E. Es decir, para todo $p \in M$ existe*

$$h_x : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *Si $v, w_1, w_2 \in E_x$, entonces $h_x(v, w_1 + w_2) = h_x(v, w_1) + h_x(v, w_2)$.*
2. *Si $v, w \in E_x, \lambda \in \mathbb{C}$, $h_x(\lambda v, w) = \lambda h_x(v, w)$.*
3. *Para $v, w \in E_x$ se tiene $h_x(v, w) = \overline{h_x(w, v)}$.*
4. *Si $v \neq 0$, entonces $h_x(v, v) > 0$.*
5. *Para cualesquiera s, s' secciones de E se tiene que la función*

   $$h(s, s') : M \to \mathbb{C}$$

   es suave.

Un fibrado con una métrica hermítica se llama ***fibrado hermítico suave****.*

Localmente, si $s_U = (s_1, \ldots, s_r)$ es un marco local en $U \subset M$, sea $h_{ij} = h(s_j, s_i)$. Entonces

$$h_{ij} = h(s_j, s_i) = \overline{h(s_i, s_j)} = \overline{h_{ji}}$$

de modo que la matriz de la métrica H_U es hermítica. De hecho, si s_V es otro marco local, entonces $s_V = g_{VU} s_U$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} h(s_a, s_b) &= h\Big(\sum g_{ak} s_k, \sum g_{bj} s_j\Big) = \sum h\Big(g_{ak} s_k, \sum g_{bj} s_j\Big) \\ &= \sum g_{ak} h\Big(s_k, \sum g_{bj} s_j\Big) = \sum g_{ak} \overline{h\Big(\sum g_{bj} s_j, s_k\Big)} \\ &= \sum g_{ak} \overline{g_{bj}}\, \overline{h(s_j, s_k)} \\ &= \sum g_{ak} h(s_k, s_j) \overline{g_{bj}} \end{aligned}$$

lo cual implica que $H_V = g_{VU} H_U g_{VU}^*$.

Definición 2.2.7. *Sea $u \in \mathcal{G}_E$. u es una* ***transformación unitaria*** *si para todos $s, s' \in \Omega^0(M; E)$ se tiene*

$$h(u(s), u(s')) = h(s, s').$$

Recordemos que $u \in \mathcal{G}_E$ es un automorfismo de E, es decir, una aplicación $u : E \to E$ tal que $u|_{E_x} : E_x \to E_x$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{G}_E = \Omega^0(M; GL(E))$. Ahora bien, la condición dada en la definición anterior se puede reescribir como

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

de donde se sigue que $U \in U(r)$. Así, si $\mathcal{G}_h$ denota el conjunto de transformaciones unitarias de E (denominado **grupo Gauge unitario**), entonces $\mathcal{G}_h = \Omega^0(M; U(E,h))$ donde $U(E,h)$ es el fibrado de grupos cuya fibra es $U(r)$.

Definición 2.2.8. *Una **transformación hermítica** es un endomorfismo u de E que satisface*

$$h(u(s), s') = h(s, u(s')).$$

*Una **transformación antihermítica** es un endomorfismo u de E que cumple*

$$h(u(s), s') = -h(s, u(s')).$$

Sea $\mathfrak{u}(E,h)$ el fibrado de álgebras de Lie cuya fibra corresponde a $\mathfrak{u}(r) = Lie(U(r))$. Entonces $\Omega^0(M; \mathfrak{u}(E,h)) = Lie(\mathcal{G}_h)$, que justamente son las transformaciones antihermíticas.

Definición 2.2.9. *Sea (E,h) un fibrado hermítico suave. Una conexión D sobre E se dice **unitaria** si para cualesquiera s_1, s_2 secciones de E se tiene*

$$d(h(s_1, s_2)) = h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2).$$

Consideremos un marco local s_U, en el cual la matriz de D sea A (la conexión puede ser denotada también d_A). Entonces si D es unitaria, entonces

$$\begin{aligned} dh(s_i, s_j) &= h(Ds_i, s_j) + h(s_i, Ds_j) \\ dh_{ji} &= h\Big(\sum s_k A_i^k, s_j\Big) + h\Big(s_i, \sum s_l A_j^l\Big) \\ dh_{ji} &= \sum A_i^k h_{jk} + \sum \overline{A_j^l} h_{li} \\ dH &= HA + A^* H \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $H = Id$, A sería una 1-forma con valores en $\mathfrak{u}(E,h)$. Recíprocamente, una matriz de 1-formas A que satisfaga $dH = HA + A^*H$ para todo marco local define una conexión unitaria. Esto se debe a que, localmente,

$$\begin{aligned} d(h(s,s')) &= d(s^* H s') = d(s^*) H s' + s^* dH s' + s^* H d(s') \\ &= d(s^*) H s' + s^*(HA + A^* H) s' + s^* H d(s') \\ &= [d(s^*) + s^* A^*] H s' + s^* H [A s' + d(s')] \\ &= [ds + As]^* H s' + s^* H D s' = h(Ds, s') + h(s, Ds') \end{aligned}$$

Naturalmente todo fibrado suave complejo admite una métrica hermítica, teniendo en cuenta que ésta se se puede definir en los abiertos trivializantes del fibrado y pegando por particiones de la unidad. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Observación 2.2.10. *Todo fibrado hermítico suave admite una conexión unitaria.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta localmente finita para M y supongamos que S_α es un marco local en U_α. Definimos $D|_{U_\alpha} = D_\alpha$ como $D_\alpha(s) := ds|_{U_\alpha}$. Esto es equivalente a considerar $\omega_\alpha = 0$, donde ω_α es la matriz de conexión en U_α. Gracias al proceso de Gram-Schmidt podemos obtener en U_α una base ortonormal de E_x, con lo cual podemos suponer que $H_\alpha = Id$. Ahora bien, si S_β es un marco local en U_β, entonces $S_\beta = g_{\beta\alpha}S_\alpha$ y además $\omega_\beta = (dg_{\beta\alpha})g_{\beta\alpha}^{-1}$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} dH_\beta &= d(g_{\beta\alpha}^* g_{\beta\alpha}) = g_{\beta\alpha}^* d(g_{\beta\alpha}) + d(g_{\beta\alpha}^*)g_{\beta\alpha} \\ &= g_{\beta\alpha}^* g_{\beta\alpha} g_{\beta\alpha}^{-1} d(g_{\beta\alpha}) + d(g_{\beta\alpha}^*)[g_{\beta\alpha}^*]^{-1} g_{\beta\alpha}^* g_{\beta\alpha} \\ &= H_\beta\omega_\beta + \omega_\beta^* H_\beta \end{aligned}$$

Por lo tanto, localmente se puede afirmar que la conexión definida es unitaria. Por último, si ϕ_α es una partición de la unidad subordinada a U_α, entonces se puede definir

$$D(s) = \sum_\alpha \phi_\alpha D_\alpha(s)$$

y por consiguiente, para s, s' secciones arbitrarias se tiene

$$\begin{aligned} d(h(s,s')) &= \sum_\alpha \phi_\alpha d(h(s,s'))|_{U_\alpha} \\ &= \sum_\alpha \phi_\alpha h(D_\alpha s, s') + h(s, D_\alpha s') \\ &= h(Ds, s') + h(s, Ds') \end{aligned}$$

por lo tanto la conexión es unitaria. □

Similar a las observaciones 2.2.3 y 2.2.5 podemos describir el espacio $\mathcal{A}(E,h)$ de todas las conexiones unitarias como un espacio afín, cuyo grupo de translaciones es $\Omega^1(M;\mathfrak{u}(E,h))$. Volviendo a los fibrados holomorfos, una conexión unitaria d_A sobre un fibrado hermítico determina un operador de Dolbeault (dado por $d_A^{0,1} = d_A'' : \Omega^0(M;E) \to \Omega^{0,1}(M;E)$); si el espacio base (E,h) es una superficie de Riemann, entonces sabemos por el Teorema 2.2.2 que tal operador permite definir una estructura *holomorfa* sobre (E,h). El siguiente resultado (junto con el Teorema 2.2.1) nos permite obtener la afirmación recíproca:

Teorema 2.2.3. *Sea (E, h) un fibrado suave complejo sobre M. Supongamos que hay una estructura holomorfa en E. Entonces existe una única conexión unitaria d_A que satisface $d_A^{0,1} = \bar{\partial}$.*

Demostración. Sea S_α un marco local en U_α. Si H_α denota la matriz de h en este marco local, definimos $\omega_\alpha := H_\alpha^{-1}\partial H_\alpha$. Si S_β es otro marco local, entonces $S_\beta = g_{\beta\alpha}S_\alpha$ y además $H_\beta = g_{\beta\alpha}H_\alpha g_{\beta\alpha}^*$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\omega_\beta &= H_\beta^{-1}\partial H_\beta = (g_{\beta\alpha}^*)^{-1}H_\alpha^{-1}g_{\beta\alpha}^{-1}\partial H_\beta \\ &= (g_{\beta\alpha}^*)^{-1}H_\alpha^{-1}g_{\beta\alpha}^{-1}\Big[H_\alpha g_{\beta\alpha}^*\partial(g_{\beta\alpha}) + g_{\beta\alpha}\partial H_\alpha g_{\beta\alpha}^* + g_{\beta\alpha}H_\alpha\partial(g_{\beta\alpha}^*)\Big]\end{aligned}$$

como $g_{\beta\alpha}$ es holomorfa, entonces $0 = \bar{\partial}g_{\beta\alpha} = \partial g_{\beta\alpha}^*$ y por ende

$$\begin{aligned}\omega_\beta &= (g_{\beta\alpha}^*)^{-1}H_\alpha^{-1}g_{\beta\alpha}^{-1}g_{\beta\alpha}^*H_\alpha\partial(g_{\beta\alpha}) + (g_{\beta\alpha}^*)^{-1}H_\alpha^{-1}\partial H_\alpha g_{\beta\alpha}^* \\ &= g_{\beta\alpha}^{-1}\partial(g_{\beta\alpha}) + (g_{\beta\alpha}^*)^{-1}H_\alpha^{-1}\partial H_\alpha g_{\beta\alpha}^*\end{aligned}$$

pero como E es hermítico, $g_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^* = Id$ y entonces

$$\omega_\beta = g_{\beta\alpha}^{-1}\partial(g_{\beta\alpha}) + g_{\beta\alpha}H_\alpha^{-1}\partial H_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}$$

Esto significa que $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ definen una conexión global en E. De hecho, tal conexión es unitaria debido a que

$$\begin{aligned}dH_\beta &= \partial H_\beta + \bar{\partial}H_\beta = H_\beta\omega_\beta + \partial\overline{H_\beta}^T \\ &= H_\beta\omega_\beta + (\overline{H_\beta}\overline{\omega_\beta})^T \\ &= H_\beta\omega_\beta + \omega_\beta^* H_\beta.\end{aligned}$$

Por último, la definición de ω implica que ω es de tipo $(1,0)$. Por lo tanto, $\omega^{0,1} = 0$ y al realizar la descomposición de d_A tenemos

$$\begin{aligned}d_A &= ds + \omega s \\ d_A^{1,0} &= d'_A = \partial s + \omega^{1,0}s \\ d_A^{0,1} &= \bar{\partial}s + \omega^{0,1}s\end{aligned}$$

con lo cual $d_A^{0,1} = \bar{\partial}$. $\square$

Por estos dos resultados tenemos que si (E, h) es un fibrado hermítico suave sobre una superficie de Riemann Σ_g, hay un isomorfismo de espacios afines

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}(E,h) & \xrightarrow{\simeq} & Dol(E) \\ d_A & \mapsto & d_A^{0,1}\end{array} \tag{2.1}$$

En particular, la acción de $\mathcal{G}_E$ en $Dol(E)$ puede ser transportada vía este isomorfismo a una acción sobre $\mathcal{A}(E,h)$ que describimos a continuación: sean $g \in \mathcal{G}_E, d_A \in \mathcal{A}(E,h)$, entonces

$$\begin{aligned} g \cdot d_A &= d_A - (d_A g)g^{-1}s = d_A s - [(d_A^{1,0} g)g^{-1} + (d_A^{0,1} g)g^{-1}]s \\ &= d_A s - [(d_A^{0,1} g)g^{-1} - [(d_A^{0,1} g)g^{-1}]^*]s \end{aligned}$$

Esta acción extiende la acción de $\mathcal{G}_h$ en $\mathcal{A}(E,h)$ por conjugación. Esto se debe a que $g \in \mathcal{G}_h$ implica $gg^* = 1$ luego

$$(d_A^{0,1} g)^* = d_A^{1,0}(g^*) = d_A^{1,0}(g^{-1}) = -g^{-1}(d_A^{1,0} g)g^{-1}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} g \cdot d_A &= d_A s - [(d_A^{0,1} g)g^{-1} - [(d_A^{0,1} g)g^{-1}]^*]s \\ &= d_A s - [(d_A^{0,1} g)g^{-1} - g^{-1*}(d_A^{0,1} g)^*]s \\ &= d_A s - [(d_A^{0,1} g)g^{-1} + g^{-1*}g^{-1}(d_A^{1,0} g)g^{-1}]s \\ &= d_A s - [(d_A^{0,1} g)g^{-1} + (d_A^{1,0} g)g^{-1}]s \\ &= d_A s - (d_A g)g^{-1}s \\ &= g(d_A(g^{-1}s)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el isomorfismo 3.2.1 establece una biyección entre el espacio de clases de isomorfismo de estructuras holomorfas y $\mathcal{A}(E,h)/\mathcal{G}_E$. Notemos que dicha biyección depende de h; es decir, si h' es otra métrica hermítica sobre E, entonces existe $g \in \mathcal{G}_E$ tal que para todas s, s' secciones se tiene

$$h(gs, gs') = h'(s, s').$$

De hecho, tal g establece un isomorfismo $\mathcal{A}(E,h) \simeq \mathcal{A}(E,h')$ que envía órbitas en órbitas. Este isomorfismo se deduce del hecho que d_A es unitaria (según h') si y solo si $g \cdot d_A$ es unitaria (según h). En efecto,

$$\begin{aligned} dh((g \cdot d_A)s, (g \cdot d_A)s') &= h(g(d_A(g^{-1}s), s')) + h(s, g(d_A(g^{-1}s'))) \\ &= h'(d_A(g^{-1}s), g^{-1}s') + h'(g^{-1}s, d_A(g^{-1}s)) \\ &= d(h'(g^{-1}s, g^{-1}s')) \\ &= d(h(s, s')) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{A}(E,h) \simeq \mathcal{A}(E,h').$$

2.3. El Teorema de Donaldson

En este aparte estamos interesados en estudiar la geometría diferencial de los espacios de módulos descritos en la sección 2.1, más especificamente el espacio de módulos de fibrados semiestables de tipo topológico fijo $\mathcal{M}(r,d)$. El Teorema de Donaldson nos facilita el primer ejemplo de reducción simpléctica (de hecho Kähleriana) en dimensión infinita y veremos que es una generalización (a dimensión infinita) del Teorema de Kempf-Ness en TGI.

La primera conexión realizada entre geometría algebraica y geometría diferencial en este contexto fue vislumbrada por Narasimhan y Seshadri [[NS65]], quienes establecieron una corrrespondencia entre fibrados estables sobre Σ_g y cierto tipo de representaciones de $\pi_1(\Sigma_g)$. El resultado es incluso más general.

Teorema 2.3.1 (Narasimhan-Seshadri)**.** *Sean $R(r,0)$ el espacio de clases de equivalencia de representaciones unitarias de $\pi_1(\Sigma_g)$ y $R^*(r,0)$ el espacio de clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles de $\pi_1(\Sigma_g)$. Entonces existen homeomorfismos*

$$R(r,0) \cong \mathcal{M}(r,0), R^*(r,0) \cong \mathcal{N}(r,0).$$

Para el caso $d \neq 0$ se presenta una equivalencia similar, pero es necesario considerar extensiones centrales de $\pi_1(\Sigma_g)$ y sus representaciones. Así, si $d = 0$, entonces hay una correspondencia entre el espacio de módulos de fibrados poliestables de grado 0 y el espacio de módulos de representaciones unitarias de $\pi_1(\Sigma_g)$. Como caso particular, se desprende la correspondencia entre el espacio de módulos de fibrados de grado 0 estables y el espacio de módulos de representaciones irreducibles unitarias de $\pi_1(\Sigma_g)$. Por ultimo, debemos reseñar que el Teorema de Narasimhan-Seshadri responde a la inquietud de saber qué estructura algebraica se podía definir en el espacio de clases de isomorfismo de todos los fibrados.

Para introducir el Teorema de Donaldson, comencemos recordando que si (E,h) es un fibrado hermítico, el espacio de conexiones unitarias $\mathcal{A}(E,h)$ es un espacio afín, cuyo grupo de translaciones es $\Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$. Esto implica que para $A \in \mathcal{A}(E,h)$ podemos identificar $T_A\mathcal{A}(E,h)$ con el espacio de 1-formas en Σ_g con valores en $\mathfrak{u}(E,h)$.

Lema 2.3.1. *Para $a, b \in T_A\mathcal{A}(E,h)$, se define*

$$\omega_A(a,b) := \int_{\Sigma_g} tr(a \wedge b).$$

*Entonces ω es una forma simpléctica en $\mathcal{A}(E,h)$, denominada **forma simpléctica de Atiyah-Bott**.*

Demostración. Claramente está bien definida porque $a \wedge b = -b \wedge a$, de modo que $\omega_A(a,b) = -\omega_A(b,a)$. Dado que la integral no depende de A, se tiene que ω es cerrada. Resta ver que es no-degenerada, para lo cual suponemos que $\omega_A(a,b) = 0$ para todo b. Usando coordenadas locales, supongamos que en un abierto $U \subset \Sigma_g$ tenemos $a = \alpha dx + \beta dy$, donde $\alpha, \beta : U \to \mathfrak{u}(r)$ son suaves. Entonces, para $b = *a = \alpha dy - \beta dx$ se tiene que

$$a \wedge *a = (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta) dvol_{\Sigma_g}$$

con lo cual $tr(a \wedge *a)$ es la 2-forma con valores en $\mathbb{R}$ dada por

$$tr(a \wedge *a) = tr(\alpha^2 + \beta^2) dvol_{\Sigma_g}.$$

Ahora bien, el hecho que $\omega_A(a, *a) = 0$ implica automáticamente que $\alpha, \beta \equiv 0$, con lo cual $a = 0$ y así ω es no-degenerada. $\square$

Ahora vamos a enriquecer la geometría de $\mathcal{A}(E,h)$ por medio de una estructura compleja. Recordemos que $\mathfrak{u}(E,h)$ es un fibrado de álgebras de Lie cuya fibra es $\mathfrak{u}(r)$, por lo tanto hereda una estructura de espacio con producto interno de $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$. Más específicamente, dados $X, Y \in \mathfrak{u}(r)$ se define

$$\kappa(X,Y) := tr(XY).$$

Ahora bien, Σ_g posee estructura Riemanniana; esto induce una estructura Riemanniana en $\Omega^k(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$, denotada π. En estas condiciones, el operador estrella de Hodge se define, para $\eta \in \Omega^k(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ como aquella $(2-k)-$forma $*\eta$ que satisface

$$\kappa(\eta, *\eta) = \pi(\eta, \eta) vol_{\Sigma_g},$$

donde vol_{Σ_g} es la 2-forma que satisface $\int_{\Sigma_g} vol_{\Sigma_g} = 1$. Notemos que al restringir el operador estrella de Hodge a 1-formas, se satisface la condición $** = -Id$, de modo que se define una estructura compleja en $\Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$.

Lema 2.3.2. *El espacio $\mathcal{A}(E,h)$, junto con la forma simpléctica de Atiyah-Bott y la estructura compleja determinada anteriormente constituyen una variedad Kähleriana. La métrica determinada por $\omega, *$ se denomina **norma** L^2.*

Demostración. Debemos mostrar que la siguiente aplicación constituye una métrica Riemanniana en $\mathcal{A}(E,h)$:

$$m(a,b) := \omega(a, *b).$$

Es definida positiva, puesto que ω es no degenerada. Por último, es simétrica debido a que

$$\begin{aligned} m(a,b) = \omega(a,*b) = \int_{\Sigma_g} tr(a \wedge *b) = \int_{\Sigma_g} \kappa(a,*b) = \int_{\Sigma_g} \pi(a,b) dvol_{\sigma_g} \\ = \int_{\Sigma_g} \pi(b,a) dvol_{\Sigma_g} = \int_{\Sigma_g} \kappa(b,*a) = \int_{\Sigma_g} tr(b \wedge *a) \\ = \omega(b,*a) = m(b,a) \end{aligned}$$

□

En la sección 2.2 veíamos que existe una acción del grupo Gauge unitario $\mathcal{G}_h$ sobre $\mathcal{A}(E,h)$ definida, para $u \in \mathcal{G}_h, A \in \mathcal{A}(E,h)$, por $u \cdot d_A = u(d_A u^{-1})$. Resulta que dicha acción preserva la estructura kähleriana de $\mathcal{A}(E,h)$. Para ver esto tenemos que demostrar dos cosas: que la acción es simpléctica y que actúa por isometrías según la métrica L^2. Notemos que la derivada de la acción de $u \in \mathcal{G}_h$ se puede describir como

$$\begin{aligned} \psi_u = \phi_{u*} : T_A\mathcal{A}(E,h) &\to \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h)) \\ a &\mapsto uau^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto, para $a, b \in \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ se tiene

$$\phi_u^*\omega(a,b) = \omega(\phi_{u*}a, \phi_{u*}b) = \int_{\Sigma_g} tr(uau^{-1} \wedge ubu^{-1})$$

y por otro lado

$$\omega(a,b) = \int_{\Sigma_g} tr(a \wedge b).$$

Pero la 1-forma uau^{-1} está definida, para $p \in \Sigma_g, v \in T_p\Sigma_g$ como

$$(uau^{-1})_p(v) := ua_p(v)u^{-1}.$$

De esto se sigue que, para $v, w \in T_p\Sigma_g$

$$\begin{aligned} tr(uau^{-1} \wedge ubu^{-1})_p(v,w) &= tr(ua_p(v)u^{-1}ub_p(w)u^{-1}) - tr(ub_p(v)u^{-1}ua_p(w)u^{-1}) \\ &= tr(a_p(v)b_p(w) - b_p(v)a_p(w)) = tr(a \wedge b)_p(v,w) \end{aligned}$$

y por consiguiente la acción de $\mathcal{G}_h$ preserva la forma de Atiyah-Bott. Para ver que $\mathcal{G}_h$ actúa por isometrías, podemos usar el hecho que $*(\psi_u(a)) = \psi_u(*a)$ para cualquier 1-forma; así

$$\begin{aligned} m(\psi_u a, \psi_u b) &= \omega(uau^{-1}, *(\psi_u b)) = \omega(uau^{-1}, u(*b)u^{-1}) \\ &= \omega(a,*b) = m(a,b) \end{aligned}$$

La acción del grupo Gauge además de preservar la estructura kähleriana, resulta ser una aplicación hamiltoniana y por ende, permite considerar cocientes en el sentido del Teorema de Marsden-Weinstein. Antes de mostrar cuál es la aplicación momento para dicha acción, probaremos el siguiente resultado.

Observación 2.3.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \Omega^2(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h)) &\to Lie(\mathcal{G}_h)^* \\ R \quad &\mapsto \quad \Big(X \mapsto \int_{\Sigma_g} \kappa(X,R) \Big) \end{aligned}$$

establece un isomorfismo de espacios vectoriales, que además es $\mathcal{G}_h-$equivariante con respecto a la acción adjunta en $\Omega^2(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ y la acción coadjunta en $Lie(\mathcal{G}_h)^*$.

Demostración. De la sección 2.2 sabemos que $Lie(\mathcal{G}_h) = \Omega^0(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h)) = \Gamma(\mathfrak{u}(E,h))$ y el operador estrella de Hodge definido antes permite identificar dicho espacio con $\Omega^2(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$. La estructura Riemanniana en $\Omega^0(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ está dada por

$$(\lambda, \xi) \mapsto \int_{\Sigma_g} \kappa(\lambda, *\xi)$$

y este hecho garantiza el isomorfismo deseado. La $\mathcal{G}_h-$equivarianza del isomorfismo se sigue del hecho que $\kappa(\lambda,\xi) = \kappa(u\lambda u^{-1}, u\xi u^{-1})$. □

Con esta herramienta, podemos especificar la herramienta central del Teorema de Donaldson.

Teorema 2.3.2. *[Atiyah-Bott] La curvatura dada por $F : \mathcal{A}(E,h) \to \Omega^2(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ es la aplicación momento para la acción del grupo Gauge $\mathcal{G}_h$ en el espacio de conexiones unitarias.*

Demostración. La curvatura es equivariante bajo la acción de $\mathcal{G}_h$ debido a que para $s \in \Omega^0(M;E)$ se tiene

$$\begin{aligned} F_{g\cdot d_A}(s) &= (g\cdot d_A)\circ(g\cdot d_A)(s) = (g\cdot d_A)(g(d_A(g^{-1}s))) \\ &= g(d_A(g^{-1}(g(d_A(g^{-1}s))))) = g(d_A\circ d_A)g^{-1}(s) = gF_{d_A}g^{-1}(s) \end{aligned}$$

Para ver la segunda condición, debemos probar que para todo $\lambda \in Lie(\mathcal{G}_h)$ la función $F^\lambda(A) = \langle F(A), \lambda\rangle$ tiene como campo hamiltoniano asociado $V_\lambda \in T\mathcal{A}(E,h)$, es decir

$$dF^\lambda = i_{V_\lambda}\omega.$$

Primero describiremos explícitamente V_λ. Recordemos que la acción de $\mathcal{G}_h$ en $\mathcal{A}(E,h)$ se describe también como $u \cdot d_A = d_A - (d_A u)u^{-1}$; por lo tanto, si $A = d + a$ localmente, usando las convenciones de la observación anterior tenemos

$$\begin{aligned} u \cdot A &= d + a - (du + [a,u])u^{-1} = d + a - (du)u^{-1} - [a,u]u^{-1} \\ &= d - (du)u^{-1} + a - (au - ua)u^{-1} \\ &= d - (du)u^{-1} + uau^{-1}. \end{aligned}$$

Así pues tenemos, para $A \in \mathcal{A}(E,h)$

$$\begin{aligned} V_{\lambda A} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(exp(t\lambda) \cdot A \Big) \\ &= -d\lambda + \lambda a - a\lambda = -(d\lambda + [a,\lambda]) \\ &= -d_A \lambda \end{aligned}$$

Ahora bien, dado $b \in \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E,h))$ tenemos

$$dF_A^\lambda(b) = (dF_A(b))(\lambda) = \langle dF_A(b), \lambda \rangle = \langle d_A b, \lambda \rangle = \int_{\Sigma_g} tr(\lambda \wedge d_A b)$$

y separadamente

$$(i_{V_\lambda}\omega)_A(b) = \omega_A(V_{\lambda A}, b) = \int_{\Sigma_g} tr(-d_A\lambda \wedge b).$$

Por último, dado que $d_A(\lambda \wedge b) = d_A\lambda \wedge b + \lambda \wedge d_A b$, entonces

$$0 = \int_{\Sigma_g} tr(d_A(\lambda \wedge b)) = \int_{\Sigma_g} tr(d_A\lambda \wedge b) + \int_{\Sigma_g} tr(\lambda \wedge d_A b)$$

y por consiguiente V_λ es campo Hamiltonino asociado a F^λ.

$\square$

El Teorema de Donaldson relaciona fibrados poliestables y conexiones unitarias. La versión original [[Don83]] establece que un fibrado vectorial es estable si y solamente si existe una conexión unitaria con curvatura central constante, única bajo isomorfismo. Este resultado puede verse naturalmente traducido en información sobre los espacios de módulos correspondientes.

Teorema 2.3.3 (Donaldson)**.** *Sea (E,h) un fibrado hermítico sobre Σ_g con $deg(E) = d, rk(E) = r$. Denotemos $\mathcal{E}$ un fibrado holomorfo con $deg(\mathcal{E}) = d, rk(\mathcal{E}) = r$ y consideremos $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ su órbita de conexiones unitarias bajo la acción del grupo Gauge complejo $\mathcal{G}_E$. Entonces $\mathcal{E}$ es estable si y solamente si $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ contiene una conexión unitaria A que satisface* *a)* $Stab_{\mathcal{G}_E}(A)) \simeq \mathbb{C}^*$.

b) $F(A) = *(2\pi i\mu(E)Id_E)$.

Dicha conexión, si existe, es única módulo la acción de $\mathcal{G}_h$.

Demostración. Ver [[Don83]] □

El Teorema de Donaldson dice explícitamente qué órbitas de conexiones unitarias están asociadas a clases de isomorfismo de fibrados estables, sabiendo que existe una correspondencia entre clases de isomorfismo de fibrados vectoriales y órbitas Gauge-complejas de conexiones unitarias. La condición b) del Teorema de Donaldson se puede interpretar en el sentido que A es un mínimo absoluto del *funcional de Yang-Mills*, definido por

$$YM(A) := \int_{\Sigma_g} \|F(A)\|^2.$$

Del Teorema de Donaldson se desprende otra descripción del Teorema 2.3.1:

Teorema 2.3.4 (Narasimhan-Seshadri 2)**.** *El espacio de módulos de fibrados poliestables de tipo topológico fijo es isomorfo al espacio de módulos de conexiones unitarias con curvatura central constante:*

$$\mathcal{M}(r,d) \cong \mathcal{A}(E,h)//\mathcal{G}_h = F^{-1}(*(2\pi i\mu(E)Id_E))/\mathcal{G}_h$$

Capítulo 3

Fibrados de Higgs: estructura hiprkähleriana

Este capítulo centra su atención en las *ecuaciones de Hitchin* y los *fibrados de Higgs*. Tales ecuaciones corresponden a una reducción dimensional de las ecuaciones de Yang-Mills. Dicha reducción dimensional fue realizada por Nigel Hitchin [[Hit87a]] para poder describir propiedades de las soluciones a tales ecuaciones. Existe una relación bien estrecha entre fibrados de Higgs y soluciones a las Ecuaciones de Hitchin. En este capítulo estudiaremos dicha relación, que se traduce en relaciones entre sus correspondientes espacios de módulos. Además, siguiendo el espíritu de este trabajo, describiremos la geometría diferencial del espacio de módulos de fibrados de Higgs semiestables.

3.1. Fibrados de Higgs

Definición 3.1.1. *Un* ***fibrado de Higgs de grado*** d ***y rango*** r *sobre una superficie de Riemann* Σ_g *compacta es un par* $(\mathcal{E}, \Phi)$*, donde* $\mathcal{E}$ *es un fibrado holomorfo con* $deg(\mathcal{E}) = d, rank(\mathcal{E}) = r$ *y* $\Phi \in \Omega^1_{hol}(\Sigma_g, End\mathcal{E})$ *es una 1-forma holomorfa. Tal 1-forma* Φ *se denomina* ***campo de Higgs***

Notemos que un campo de Higgs es equivalente a $\Phi \in \Omega^{1,0}(\Sigma_g, End\mathcal{E})$ con la condición $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}\Phi = 0$, donde $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}$ es el operador de Dolbeault inducido por $\mathcal{E}$. Clasificar fibrados de Higgs requiere nuevamente definir una noción de estabilidad en este contexto.

Definición 3.1.2. *Un fibrado de Higgs* $(\mathcal{E}, \Phi)$ *se denomina*

1. ***Estable*** *si para todo* $\mathcal{F}$ *no trivial invariante por* Φ *(en el sentido que* Φ *envía* $\mathcal{F}_p$ *en* $\mathcal{F}_p$ *para todo* $p \in \Sigma_g$*) se tiene* $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$*.*

2. ***Semiestable*** *si para todo $\mathcal{F}$ no trivial invariante por Φ se tiene $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.*

3. ***Poliestable*** *si $(\mathcal{E}, \Phi) = (\mathcal{E}_1, \Phi_1) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{E}_k, \Phi_k)$, donde $((\mathcal{E}_i, \Phi_i))$ son estables y satisfacen $\mu(\mathcal{E}_i) = \mu(\mathcal{E})$ para todo i.*

Claramente todo fibrado de Higgs de grado d y rango r estable es semiestable y la afirmación recíproca se satisface en el caso que $(r, d) = 1$. La $S-$equivalencia definida en la Sección 2.1 tiene sentido en este contexto y por lo tanto podemos definir el **espacio de módulos de fibrados de Higgs semiestables de grado d y rango r** como el conjunto de clases de $S-$equivalencia de fibrados de Higgs semiestables de grado d y rango r; este espacio se denota $\mathcal{M}^H(r, d)$ y también puede ser considerado como el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de Higgs poliestables de tipo topológico fijo.

De igual forma tenemos el **espacio de módulos de fibrados de Higgs estables de grado d y rango r**, denotado $\mathcal{N}^H(r, d)$ y definido como el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de Higgs estables de grado d y rango r. Nitsure [[GPBS10]] demostró que $\mathcal{N}^H(r, d)$ es un abierto de $\mathcal{M}^H(r, d)$, que a su vez es una variedad casiproyectiva algebraica de dimensión $2[1 + r^2(g - 1)]$. Hitchin [[Hit87a]] y Simpson [[Sim88],[Sim]] establecieron la respuesta a la inquietud de saber qué objetos holomorfos estaban asociados a representaciones de $\pi_1(\Sigma_g)$ en $GL(r, \mathbb{C})$:

Teorema 3.1.1. *Se tienen las siguientes biyecciones:*

$$\mathcal{M}^H(r, 0) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \textit{clases de isomorfismo de} \\ \textit{representaciones completamente} \\ \textit{reducibles de } \pi_1(\Sigma_g) \textit{en } GL(r, \mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{N}^H(r, 0) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \textit{clases de isomorfismo de} \\ \textit{representaciones irreducibles} \\ \textit{de } \pi_1(\Sigma_g) \textit{en } GL(r, \mathbb{C}) \end{array} \right\}.$$

En el caso que un fibrado de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$ satisfaga $\Phi \equiv 0$, entonces se recupera el Teorema 2.3.1.

3.2. Las ecuaciones de Hitchin

Ahora vamos a discutir sobre las *Ecuaciones de Hitchin* y más especificamente sobre sus soluciones, pues están relacionadas con la noción de estabilidad. Fijemos un fibrado de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$ de grado d y rango r sobre una superficie de Riemann Σ_g y sea E un fibrado suave sobre Σ_g con $rank(E) = r, deg(E) = d$. Una métrica hermitiana h sobre E satisface la *Ecuación de Hitchin* si

$$F_A + [\Phi, \Phi^*] = *2\pi i \frac{d}{r} Id_E, \tag{3.1}$$

donde A es la conexión asociada a h de acuerdo con la Observación 2.2.10. Podemos estudiar el problema de hallar soluciones a la ecuación (3.1) desde otro punto de vista. Consideremos (E, h) un fibrado hermítico sobre Σ_g fijo, entonces resolver la ecuación (3.1) equivale a encontrar una conexión unitaria A y $\Phi \in \Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE)$ que satisfagan las *ecuaciones de Hitchin*:

$$\begin{aligned} F_A + [\Phi, \Phi^*] &= *2\pi i \frac{d}{r} Id_E \\ \bar{\partial}_A \Phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\bar{\partial}_A$ corresponde al operador de Dolbeault inducido por A. Consideremos la acción del grupo Gauge unitario $\mathcal{G}_h$ en $\Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE)$ definida, para $u \in \mathcal{G}_h, \Phi$ 1-forma, como $u \cdot \Phi = u\Phi u^{-1}$. Entonces la acción diagonal de $\mathcal{G}_h$ sobre $\mathcal{X} = \mathcal{A}(E, h) \times \Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE)$ deja invariantes las ecuaciones de Hitchin. Por consiguiente, si $\mathcal{X}_s$ denota el conjunto de soluciones a (3.2), entonces se define el *espacio de módulos de soluciones a las ecuaciones de Hitchin* como el espacio de órbitas $\mathcal{X}_s/\mathcal{G}_h$.

El siguiente resultado muestra que podemos describir la solución a (3.2) cambiando el espacio de $(1, 0)$ formas diferenciales; naturalmente esto modifica las ecuaciones a satisfacer.

Observación 3.2.1. *Se tiene un isomorfismo entre* $\Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE)$ *y* $\Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E, h))$ *que además es* $\mathcal{G}_h-$*equivariante.*

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned} \diamondsuit : \Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE) &\to \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E, h)) \\ \Phi &\mapsto \Psi := \Phi - \Phi^*, \end{aligned}$$

Dicha aplicación está bien definida puesto que $\Psi^* = \Phi^* - \Phi = -\Psi$, luego Ψ tiene valores en $\mathfrak{u}(E, h)$. Ahora, dado $\Psi \in \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E, h))$ se define $\diamondsuit^{-1}(\Psi) := \Phi$, donde Φ está definida para $p \in \Sigma_g, v \in T_p\Sigma_g$ como

$$\Phi_p(v) := \frac{\Psi_p(v) + i\Psi_p^*(iv)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\diamondsuit(\diamondsuit^{-1}(\Psi)) &= \diamondsuit\Big(\frac{\Psi + i\Psi^*}{2}\Big) = \frac{\Psi + i\Psi^*}{2} - \frac{[\Psi + i\Psi^*]^*}{2} \\ &= \frac{\Psi + i\Psi^* - \Psi^* + i\Psi}{2} = \frac{\Psi - i\Psi + \Psi + i\Psi}{2} \\ &= \Psi\end{aligned}$$

y además para todo $p \in \Sigma_g, v \in T_p\Sigma_g$ se tiene

$$\begin{aligned}(\diamondsuit^{-1}(\diamondsuit(\Phi)))_p(v) = (\diamondsuit^{-1}(\Phi - \Phi^*))_p(v) &= \frac{(\Phi - \Phi^*)_p(v) + i(\Phi - \Phi^*)^*(iv)}{2} \\ &= \frac{\Phi_p(v) - \Phi_p^*(iv) + i\Phi_p^*(i(iv)) - i\Phi_p(iv)}{2} \\ &= \frac{\Phi_p(v) + i\Phi_p^*(v) - i\Phi_p^*(v) - i^2\Phi_p(v)}{2} \\ &= \Phi_p(v)\end{aligned}$$

luego $\diamondsuit$ es un isomorfismo. Por último, si $u \in \mathcal{G}_h$, entonces

$$\begin{aligned}u \cdot \diamondsuit(\Phi) &= u\diamondsuit(\Phi)u^{-1} = u[\Phi - \Phi^*]u^{-1} \\ &= u\Phi u^{-1} - u\Phi^* u^{-1} = u \cdot \Phi - (u\Phi u^{-1})^* \\ &= u \cdot \Phi - (u \cdot \Phi)^* = \diamondsuit(u \cdot \Phi)\end{aligned}$$

$\square$

Bajo esta identificación, una solución a las ecuaciones de Hitchin es un par (A, Ψ), donde $A \in \mathcal{A}(E, h), \Psi \in \Omega^1(\Sigma_g, \mathfrak{u}(E, h))$ que satisface

$$\begin{aligned}F_A - \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] &= 0 \\ d_A\Psi &= 0 \\ d_A^*\Psi &= 0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}[\Psi, \Psi] &= \Psi \wedge \Psi + \Psi \wedge \Psi = 2(\Phi - \Phi^*) \wedge (\Phi - \Phi^*) \\ &= 2\Phi \wedge \Phi + 2\Phi^* \wedge \Phi^* - 2\Phi \wedge \Phi^* - 2\Phi^* \wedge \Phi \\ &= -2(\Phi \wedge \Phi^* + \Phi^* \wedge \Phi) \\ &= -2[\Phi, \Phi^*].\end{aligned}$$

De nuevo, la acción de $\mathcal{G}_h$ sobre $\mathcal{A}(E,h)\times\Omega^1(\Sigma_g,\mathfrak{u}(E,h))$ deja invariante (3.3); este hecho sumado a la equivarianza establecida en la observación permite ver el conjunto de $\mathcal{G}_h-$órbitas de soluciones a (3.3) en biyección con $\mathcal{X}_s/\mathcal{G}_h$.

3.3. Espacio cotangente de $\mathcal{A}(E,h)$ y cociente hiperkähleriano

En esta sección mostraremos como surge un cociente hiperkähleriano en este contexto. De hecho, gracias al Teorema de Hitchin podemos identificar este cociente como un espacio de módulos.

Primero notemos que en virtud de la observación 3.2.1 podemos identificar $T^*\mathcal{A}(E,h)$ con $\mathcal{X}=\mathcal{A}(E,h)\times\Omega^{1,0}(\Sigma_g,EndE)$. Ahora bien, para poder definir una estructura hiperkähleriana en $\mathcal{X}$ debemos describir $T\mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{A}(E,h)\simeq Dol(E)$ y $Dol(E)$ tiene como grupo de translaciones $\Omega^{0,1}(\Sigma_g,EndE)$, entonces en cualquier punto $(A,\Phi)\in\mathcal{X}$ se tiene $T_{(A,\Phi)}\mathcal{X}\simeq\Omega^{0,1}(\Sigma_g,EndE)\oplus\Omega^{1,0}(\Sigma_g,EndE)$. Vamos a definir una $(2,0)$-forma compleja que es cerrada y no degenerada, por lo tanto dota a $\mathcal{X}$ de estructura simpléctica-compleja: para $(\psi_1,\phi_1),(\psi_2,\phi_2)\in T_{(A,\Phi)}\mathcal{X}$ se define [[Hit87a]]

$$\omega_{Hit}((\psi_1,\phi_1),(\psi_2,\phi_2)):=\int Tr(\phi_2\wedge\psi_1-\phi_1\wedge\psi_2).$$

Además de ω_{Hit} hay una estructura compleja dada por $I_1(\psi,\phi)=(i\psi,i\phi)$; por lo tanto, $T^*\mathcal{A}(E,h)$ posee estructura hiperkähleriana.

Vamos a identificar $T^*\mathcal{A}(E,h)$ con $Dol(E)\times\Omega^{1,0}(\Sigma_g,EndE)$. El grupo Gauge $\mathcal{G}_E$ actúa en este espacio por acción diagonal, es decir, para $g\in\mathcal{G}_E, g\cdot(\bar\partial_A,\Phi)=(g\cdot\bar\partial_A,g\Phi g^{-1})$. Dicha acción preserva la estructura hiperkähleriana. El siguiente resultado indica que dicha acción es hiperhamiltoniana.

Teorema 3.3.1. *La acción diagonal de $\mathcal{G}_h$ en $T^*\mathcal{A}(E,h)$ es hiperhamiltoniana y sus aplicaciones momento están dadas por*

$$\begin{aligned}\mu_I : T^*\mathcal{A}(E,h) &\to \Omega^2(\Sigma_g,\mathfrak{u}(E,h))\\ (A,\Phi) &\mapsto F_A+[\Phi,\Phi^*]\\ \mu_{\mathbb{C}} : T^*\mathcal{A}(E,h) &\to \mathbb{C}\otimes\Omega^2(\Sigma_g,\mathfrak{u}(E,h))\\ (A,\Phi) &\mapsto \bar\partial_A\Phi\end{aligned}$$

Demostración. Para probar que $\mu = \mu_I$ es aplicación momento, debemos recordar que la métrica en $\Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE)$ está dada por

$$g(\phi_1, \phi_2) = -i \int tr(\phi_1 \wedge \phi_2^*),$$

que junto con la estructura compleja I_1 dan lugar a la forma simpléctica

$$\omega(\phi_1, \phi_2)) = \int tr(\phi_1 \wedge \phi_2^*).$$

Sea $\lambda \in Lie(\mathcal{G}_h)$. Entonces para $(A, \Phi) \in T^*\mathcal{A}(E, h)$ se tiene

$$\begin{aligned}
V_{\lambda(A,\Phi)} &= \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(exp(t\lambda) \cdot d_A), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((exp(t\lambda) \cdot \Phi)\Big) \\
&= \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(exp(t\lambda) \cdot d_A), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((exp(t\lambda)\Phi exp(-t\lambda))\Big) \\
&= (-d_A\lambda, [\lambda, \Phi])
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(i_{V_\lambda}\omega)(\Psi) = \omega(V_{\lambda\Phi}, \Psi) = \omega([\lambda, \Phi], \Psi) &= \int tr([\lambda, \Phi] \wedge \Psi^*) \\
&= \int tr(\lambda \wedge [\Phi, \Psi^*])
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
&d\mu_\Phi^\lambda(\Psi) = \Big\langle d\mu_\Phi(\Psi), \lambda\Big\rangle = \int tr(\lambda \wedge d\mu_\Phi(\Psi)) \\
&d\mu_\Phi(\Psi) = [\Phi, \Psi^*].
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de arriba, junto con el Teorema de Atiyah-Bott prueban que μ es aplicación momento (según la estructura I_1). Para probar que $\mu_{\mathbb{C}}$ es aplicación momento, usaremos la identificación

$$T_{(A,\Phi)}\mathcal{X} \simeq \Omega^{0,1}(\Sigma_g, EndE) \oplus \Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE).$$

Así, para $\lambda \in Lie(\mathcal{G}_h), (\bar{\partial}_A, \Phi) \in \mathcal{X}$ se tiene

$$V_{\lambda(\bar{\partial}_A,\Phi)} = \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(exp(t\lambda) \cdot \bar{\partial}_A), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((exp(t\lambda) \cdot \Phi)\Big)$$

y un cálculo análogo al realizado para $V_{\lambda(A,\Phi)}$ permite concluir que

$$V_{\lambda(\bar{\partial}_A,\Phi)} = (-\bar{\partial}_A\lambda, [\lambda, \Phi]).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(i_{V_\lambda}\omega_{Hit})_{(A,\Phi)}(b,\eta) &= \omega_{Hit}((-\bar{\partial}_A\lambda,[\lambda,\Phi]),(b,\eta)) \\ &= \int tr(\eta\wedge(-\bar{\partial}_A) - [\lambda,\Phi]\wedge b) \\ &= \int tr(-\bar{\partial}_A\eta\wedge\lambda - \lambda\wedge[\Phi,b]) \\ &= \int tr(\lambda\wedge\bar{\partial}_A\eta - \lambda\wedge[\Phi,b]) \\ &= \int tr(\lambda\wedge(\bar{\partial}_A\eta - [\Phi,b]))\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}d\mu^{\lambda}_{(A,\Phi)}(b,\Psi) &= \Big\langle d\mu_{(A,\Phi)}(b,\eta),\lambda\Big\rangle \\ &= \int tr\Big(\lambda\wedge d\mu_{(A,\Phi)}(b,\eta)\Big)\end{aligned}$$

pero dado que

$$\begin{aligned}d\mu_{(A,\Phi)}(b,\eta) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\mu(A+tb,\Phi+t\eta)\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\bar{\partial}_{A+tb}(\Phi+t\eta)\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\bar{\partial}_{A+tb}(\Phi)\Big) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\bar{\partial}_{A+tb}(t\eta)\Big) \\ &= [b,\Phi] + \bar{\partial}_A\eta\end{aligned}$$

entonces se obtiene que $\mu_{\mathbb{C}}$ es aplicación momento (según la estructura holomorfa-simpléctica).

□

Por lo tanto tiene sentido considerar cocientes hiperkählerianos en este contexto. Para la situacion que nos concierne en este trabajo, se tiene que

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) = \{(A,\Phi) : \bar{\partial}_A\Phi = 0\}.$$

Por consiguiente, el cociente hiperkahleriano esta dado por

$$\Big\{(A,\Phi)\in\mathcal{A}(E,h)\times\Omega^{1,0}(\Sigma_g,EndE) : \begin{array}{c}\bar{\partial}_A\Phi = 0 \\ F_A + [\Phi,\Phi^*] = *2\pi i\frac{d}{r}Id_E\end{array}\Big\}\Big/\mathcal{G}_h,$$

que precisamente coincide con el espacio de modulos de soluciones a las Ecuaciones de Hitchin. De hecho, el conjunto de fibrados de Higgs puede verse como el conjunto $\{(\bar{\partial}_E, \Phi) \in Dol(E) \times \Omega^{1,0}(\Sigma_g, EndE) : \bar{\partial}_E \Phi = 0\}$. Por lo tanto, el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados de Higgs se identifica con

$$\{(\bar{\partial}_E, \Phi) : \bar{\partial}_E \Phi = 0\}/\mathcal{G}_E.$$

Terminamos esta sección enunciado el Teorema de Hitchin, probado por él mismo [[Hit87a]] en el caso $rnk(E) = 2$ y probado para rango arbitrario por Simpson [[Sim88],[Sim]].

Teorema 3.3.2 (Hitchin). *Sea $(\mathcal{E}, \Phi)$ un fibrado de Higgs y denotemos $\mathcal{O}(\mathcal{E}, \Phi)$ su orbita bajo $\mathcal{G}_E$. $(\mathcal{E}, \Phi)$ es poliestable si y solo si $\mathcal{O}(\mathcal{E}, \Phi)$ contiene un par (A, ϕ) que satisface $F_A + [\phi, \phi*] = *2\pi i \frac{d}{r} Id_{\mathcal{E}}$. Tal par (A, ϕ) es único módulo $\mathcal{G}_h$.*

3.4. Relaciones entre espacios de módulos

Supongamos que $\mathcal{E}$ es un fibrado holomorfo y además que $d = deg(\mathcal{E}), r = rank(\mathcal{E})$ satisfacen $(r, d) = 1$. Sabemos de la sección 2.1 que $\mathcal{M}(r, d), \mathcal{N}(r, d)$ coinciden. Más aún, Narasimhan y Ramanan prueban que si $(r, d) = 1$, entonces $\mathcal{M}(r, d)$ posee estructura de variedad suave. Por lo tanto tiene sentido describir su espacio tangente en cualquier punto $[\mathcal{E}]$.

Observación 3.4.1. *Para todo $\mathcal{E}$ de grado d y rango r se tiene $T_{[\mathcal{E}]}\mathcal{M}(r, d) = H^1(\Sigma_g, End\mathcal{E})$.*

Demostración. Primero que todo, notemos que podemos describir $\mathcal{M}(r, d)$ como un espacio de órbitas. Sea E un fibrado suave complejo de grado d y rango r. En la sección 2.2 se estableció una biyección entre $Dol(E)/\mathcal{G}_E$ y clases de isomorfismo de estructuras holomorfas sobre E. Por lo tanto, si definimos

$$Dol^{ps}(E) = \{\bar{\partial}_E : (E, \bar{\partial}_E) \text{ es poliestable}\},$$

entonces

$$\mathcal{M}(r, d) \simeq Dol^{ps}(E)/\mathcal{G}_E.$$

En vista de esta identificación, para $[\bar{\partial}_E] \in \mathcal{M}(r, d)$ se tiene

$$T_{[\bar{\partial}_E]}\mathcal{M}(r, d) = \frac{T_{\bar{\partial}_E} Dol^{ps}(E)}{T_{\bar{\partial}_E}\mathcal{O}_{\bar{\partial}_E}}.$$

Como $Dol(E)$ es un espacio afín, entonces $T_{\bar{\partial}_E} Dol^{ps}(E) = \Omega^{0,1}(\Sigma_g, EndE)$. Ahora, $T_{\bar{\partial}_E}\mathcal{O}_{\bar{\partial}_E}$ se puede identificar con el conjunto de campos fundamentales asociados a elementos de

$Lie(\mathcal{G}_E)$. En la prueba del Teorema 2.3.2 describimos dicho conjunto como $\{\bar{\partial}_E s : s \in \Omega^0(\Sigma_g, EndE)\}$. Así las cosas se tiene

$$T_{[\bar{\partial}_E]} = \frac{\Omega^{0,1}(\Sigma_g, EndE)}{\{\bar{\partial}_E s : s \in \Omega^0(\Sigma_g, EndE)\}}.$$

Por otro lado, si $End\mathcal{E}$ denota el haz de secciones *holomorfas* del fibrado $End\mathcal{E}$, entonces el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\Sigma_g, End\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \Omega^{0,1}(\Sigma_g, End\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \Omega^{0,2}(\Sigma_g, End\mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

implica que $T_{[\bar{\partial}_E]}\mathcal{M}(r,d) = H^1(\Sigma_g, End\mathcal{E})$.

$\square$

Bajo estas condiciones, un elemento de $T^*\mathcal{M}(r,d)$ consiste en un fibrado holomorfo $\mathcal{E}$ junto con una 1-forma $\Phi \in H^1(\Sigma_g, End\mathcal{E})^*$. Este espacio se puede identificar (por dualidad de Serre) con $H^0(\Sigma_g, End\mathcal{E} \otimes K)$, donde K es el fibrado en rectas canónico de Σ_g. Así pues, Φ es una sección global de $End\mathcal{E} \otimes T^*\Sigma_g$, o en forma equivalente, una 1-forma con valores en $End\mathcal{E}$ holomorfa. Esto es equivalente a un fibrado de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$. Pero $\mathcal{E}$ es semiestable, por lo tanto $(\mathcal{E}, \Phi)$ es fibrado de Higgs semiestable para toda Φ. Todo esto lleva a concluir que

$$T^*\mathcal{M}(r,d) \subset \mathcal{M}^H(r,d).$$

En resumen, fijando una estructura hermítica h en un fibrado suave E se induce una estructura kähleriana en el espacio de conexiones unitarias $\mathcal{A}(E,h)$. Considerando el cociente de Marsden-Weinstein bajo la acción del grupo $\mathcal{G}_h$ obtenemos el espacio de módulos $\mathcal{M}(r,d)$. El espacio $T^*\mathcal{A}(E,h)$ posee una estructura hiperkähleriana, como vimos en la sección 2.3; además, la acción del grupo $\mathcal{G}_h$ es hiperhamiltoniana. El cociente hiperkähleriano construido en la sección anterior puede ser entendido, gracias al Teorema de Hitchin, como el espacio de módulos de fibrados de Higgs poliestables. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama no conmutativo que es una buena aproximación (en dimensión infinita) de la situación mostrada en el capítulo 1:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(E,h) \arrow[rr, "cot."] \arrow[d, "red."'] & & T^*\mathcal{A}(E,h) \arrow[d, "red."'] \\
\mathcal{A}(E,h)/\!/\mathcal{G}_h \arrow[r, "cot."] & T^*\mathcal{M}(r,d) \arrow[r, "inclusion"] & T^*\mathcal{A}(E,h)/\!/\!/\mathcal{G}_h
\end{tikzcd}$$

Bibliografía

[AB83] Michael F. Atiyah and Raoul Bott. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 308(1505):523–615, 1983.

[Ati57] Michael F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. London Math. Soc.*, 3(7):414–452, 1957.

[BBPGPR09] Steven Bradlow, Leticia Brambila-Paz, Oscar Garcia-Prada, and S. Ramanan. *Moduli Spaces and Vector Bundles.* London Mathematical Society Lecture Notes Series:359. Cambridge University Press, UK, first edition, 2009.

[Boa] Philip Boalch. Noncompact complex symplectic and hyperkähler manifolds. M2 Cours Specialisé 2009, Preliminary Notes.

[CdS01] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Don83] S. K. Donaldson. A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri. *J. Differential Geom.*, 18(2):269–277, 1983.

[Don87] S. K. Donaldson. Twisted harmonic maps and the self-duality equations. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(1):127–131, 1987.

[For91] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces.* Volume 81 of Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, first edition, 1991.

[GPBS10] Oscar Garcia-Prada, Jean Pierre Bourguignon, and Simon Salamon. *The many facets of geometry; A tribute to Nigel Hitchin.* Oxford Science Publications. Oxford University Press, New York, first edition, 2010.

[Hit87a] N. J. Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(1):59–126, 1987.

[Hit87b] Nigel Hitchin. Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J.*, 54(1):91–114, 1987.

[Hit92] Nigel Hitchin. Hyper-Kähler manifolds. *Astérisque*, (206):Exp. No. 748, 3, 137–166, 1992. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

[HKLR87] Nigel Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Rocěk. Hyperkähler metrics and supersymmetry. *Commun. Math. Phys.*, 108:535–589, 1987.

[HSW99] N. J. Hitchin, G. B. Segal, and R. S. Ward. *Integrable systems*, volume 4 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Twistors, loop groups, and Riemann surfaces, Lectures from the Instructional Conference held at the University of Oxford, Oxford, September 1997.

[Kob87] Shoshichi Kobayashi. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles.* Publications of The Mathematical Society of Japan, Kāno Memorial Lectures 5. Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press, New Jersey, first edition, 1987.

[MFK93] David Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric Invariant Theory. 3rd enl. ed.* Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[MS98] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.

[Mum63] David Mumford. Projective invariants of projective structures and applications. in. *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962*, pages 526–530, 1963.

[NS65] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable and unitary vector bundles on a compact riemann surface. *Ann. Math*, 2(85):540–567, 1965.

[Sch] Florent Schaffhauser. Differential geometry of holomorphic bundles on a curve. Lecture Notes of Villa de Leiva'09.

[Sch08] Alexander Schmitt. *Geometric Invariant Theory and Decorated Principal Bundles.* Zurich Lectures un Mathematical Sciences. European Mathematical Society, Germany, first edition, 2008.

[Ses67] C. S. Seshadri. Space of unitary vector bundles on a compact riemann surface. *Ann. Math*, 2(85):303–336, 1967.

[Sim] C. T. Simpson. Higgs bundles and local systems. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, (75).

[Sim88] C. T. Simpson. Constructing variations of hodge structure using yang-mills theory and applications to uniformization. *J. Amer. Math. Soc*, pages 867–918, 1988.

[Wel08] Raymond O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds, new Appendix by Oscar Garcia-Prada.* Graduate Texts in Mathematics 65. Springer, New York, third edition, 2008.

[Wen] Richard Wentworth. Higgs bundles and local systems on riemann surfaces.