UNIFORMIZACIÓN DE CURVAS ALGEBRAICAS REALES

ANDRÉS JARAMILLO PUENTES

Resumen. Desarrollamos un análogo de la teoría de Galois para cubrimientos analíticos y de la teoría de uniformización de superficies de Riemann para curvas algebraicas reales geométricamente suaves, usando la equivalencia entre éstas y las superficies de Riemann M dotadas de una involución antiholomorfa σ (también conocida como estructura real). En este contexto, usando el teorema de uniformización para superficies de Riemann y la teoría de Galois de los cubrimientos holomorfos, analizamos los cubrimientos analíticos de M que admiten una estructura real. Recordamos la construcción del grupo fundamental real de (M, σ) y damos una descripción topológica del mismo, y lo usamos para encontrar una equivalencia entre ciertos subgrupos de éste y cubrimientos que admiten una estructura real compatible. Construimos una representación del grupo fundamental real en el grupo de automorfismos dianalíticos del espacio recubridor universal $\widetilde{M}$. Denotamos $\Gamma_{\mathbb{R}}$ la imagen de esta representación, y mostramos que las transformaciones holomorfas de $\widetilde{M}$ dentro de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ forman un subgrupo de índice 2, denotado Γ, el cual es discreto y actúa libremente en $\widetilde{M}$. Entonces mostramos la existencia de un isomorfismo de curvas algebraicas reales entre (M, σ) y el cociente $\widetilde{M}/\Gamma$ dotado con la involución dada por el elemento no trivial en $\Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma$.

Índice

1. Introducción

El proposito de este documento es desarrollar un análogo de la teoría de Galois para cubrimientos analíticos y la teoría de uniformización de superficies de Riemann en el contexto de las curvas algebraicas reales, usando la equivalencia entre estas y las superficies de Riemann M dotadas de una involución antiholomorfa σ.

En la primera parte enunciamos los resultados clásicos de la teoría de superficies de Riemann que queremos extrapolar a las curvas algebraicas reales, junto con las herramientas utilizadas.

En la segunda parte describimos la versión real del grupo fundamental, el cual es nuestra herramienta principal. Éste es una extensión de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por el grupo fundamental real topológico. Damos una descripción de éste en términos de caminos y lo usaremos para presentar una curva algebraica real hiperbólica como cociente del semiplano de Poincaré $\mathcal{H}$ por un grupo discreto de automorfismos dotado de una estructura real inducida por una biyección antiholomorfa de $\mathcal{H}$. Nosotros establecemos una correspondencia de Galois real entre cubrimientos de una curva algebraica por curvas algebraicas reales y subgrupos del grupo fundamental real que no están contenidos en el grupo fundamental topológico. Damos un ejemplo de una curva algebraica real que no tiene un cubrimiento universal real.

2. Superficies de Riemann

Definición 2.1. Una superficie de Riemann es una 2-variedad diferenciable con un atlas maximal $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ en donde las funciones de transición son funciones analíticas (satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto) entre abiertos de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Como ejemplos clásicos tenemos el plano complejo $\mathbb{C}$, cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entre los cuales se encuentran el semiplano de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ y el disco abierto $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. La recta proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ (homeomorfa a la esfera $\mathcal{S}^2$) tiene estructura de superficie de Riemann determinada por las cartas (U_o, φ_0) y (U_1, φ_1) donde $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \mid z_1 \neq 0\}$ y

$$\varphi_0 : \begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \frac{z_1}{z_0} \end{array},$$

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \frac{z_0}{z_1} \end{array}.$$

La recta proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ es conocida como la esfera de Riemann y coincide con la compactificación de Alexandrov del plano complejo al agregar un punto al infinito.

Definición 2.2. Dadas dos superficies de Riemann $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, un *homomorfismo* de superficies de Riemann es una función (continua) $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, tal que para cada carta (U, φ) de $\mathcal{M}$ y cada carta (V, ψ) de $\mathcal{N}$, para las cuales $f(U) \subseteq V$, se tiene que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longmapsto \psi(V)$ es una función holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$.

Un *isomorfismo* de superficies de Riemann es una biyección $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que f y f^{-1} son homomorfismos de superficies de Riemann.

Estos homomorfismos se conocen como funciones holomorfas o analíticas entre superficies de Riemann. La transformación de Cayley

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

es un isomorfismo de superficies de Riemann.

Proposición 2.3. *Si $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es una función holomorfa y bijectiva, entonces f^{-1} es holomorfa, es decir, f es un isomorfismo de superficies de Riemann.*

Proposición 2.4 ([For81]).

- *El grupo de automorfismos de la esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es isomorfo a $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$. Este isomorfismo es el inverso del homomorfismo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PGL}(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

- *El grupo de automorfismos del semiplano de Poincaré es el subgrupo de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ *que dejan invariante a $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Es isomorfo a $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ mediante restricción de la aplicación anterior.*
- *El grupo de automorfismos del plano complejo $\mathbb{C}$ es el subgrupo de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathbf{P}^1)$ *que dejan invariante a $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Es isomorfo a $\{z \longmapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$.*

Dotamos cada uno de estos grupos de la topología de subespacio, considerando $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$.

2.1. Superficies de Riemann simplemente conexas.

Definición 2.5.

- Dado un espacio topológico X y un punto $a \in X$, el *grupo fundamental* de X con respecto a a es $\pi_1(X; a)$, el conjunto de aplicaciones continuas $\gamma : S^1 \longrightarrow X$ tales que $\gamma(1) = a$ (también conocidas como caminos cerrados, o lazos, basados en a) módulo relación de homotopía. La ley de multiplicación está dada por $[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma^\frown\eta]$ donde $\gamma^\frown\eta$ es la concatenación de caminos

$$\gamma^\frown\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \eta(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

la cual es un camino que recorre γ y luego η.
- Un espacio topológico X es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y su grupo fundamental $\pi_1(X; a)$ es el grupo trivial para algún $a \in X$.

Si X es una superficie de Riemann conexa (la cual es un espacio topológico conexo por caminos) un camino γ entre dos puntos a y b de X determina el isomorfismo no canónico

$$g_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X; a) & \longrightarrow & \pi_1(X; b) \\ [\eta] & \longmapsto & [\gamma^{-1\frown}\eta^\frown\gamma] \end{array}$$

Por lo tanto, el grupo fundamental de una superficie de Riemann conexa no depende del punto de base.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces f induce un homomorfismo de grupos

$$f_* : \begin{array}{ccc} \pi_1(X; a) & \longrightarrow & \pi_1(Y; f(a)) \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma] \end{array} .$$

2.2. Cubrimientos analíticos.

Definición 2.6. Si $p : Y \longrightarrow X$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, p es un *cubrimiento topológico* si para cada $x \in X$ existe una vecindad $V \subset X$ de x tal que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$ y $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow V$ es un homeomorfismo.

Un cubrimiento topológico $p : Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo local. p se dice conexo si su dominio lo es. El conjunto $p^{-1}(\{x\})$ es llamado la *fibra* de p en $x \in X$. Un *cubrimiento analítico* u *holomorfo* es un cubrimiento topológico entre superficies de Riemann.

Proposición 2.7 ([For81])**.** *Si X es una superficie de Riemann, Y es un espacio topológico Hausdorff y $p : Y \longrightarrow X$ es un cubrimiento topológico, entonces existe una única estructura de superficie de Riemann sobre Y para la cual p es un cubrimiento analítico.*

Supongamos que X, Y y Z son espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ y $f : Z \longrightarrow X$ son funciones continuas. Entonces por un *levantamiento* de f con respecto a p, nos referimos a una función continua $g : Z \longrightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorema 2.8 (Unicidad del levantamiento, [For81])**.** *Supongamos que $p : X \longrightarrow Y$ es un cubrimiento topológico entre superficies de Riemann. Si Z es un espacio topológico conexo y $f : Z \longrightarrow X$ es una función continua. Si g_1, g_2 son dos levantamientos de f y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.*

Cuando $Z = [0,1]$, la función f es un camino en X, y su levantamiento $g : [0,1] \longrightarrow Y$ es un camino en Y que se proyecta a X mediante p. Por el teorema anterior, basta con determinar g en un punto para determinar todo g. Así, escogiendo $y \in p^{-1}(\{x\})$ fijo, podemos levantar de manera única cualquier camino empezando en $x = p(y)$. Como el grupo fundamental está compuesto de clases de homotopía, la siguiente propiedad nos será muy útil.

Teorema 2.9 (Levantamientos de curvas homotópicas, [For81])**.** *Supongamos que $p : Y \longrightarrow X$ es un cubrimiento holomorfo entre superficies de Riemann. Supongamos que $a, b \in X$ y que $\widetilde{a} \in Y$ es un punto tal que $p(\widetilde{a}) = a$. Si suponemos que una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ es tal que $H(0,s) = a$ y $H(1,s) = b$ para cada $s \in [0,1]$. Definiendo $u_s(t) := H(t,s)$, tenemos una familia de curvas. Cada curva u_s puede ser levantada a una curva inicial $\widetilde{u_s}$ con punto inicial $\widetilde{a}$, entonces $\widetilde{u_0}$ y $\widetilde{u_1}$ tienen el mismo punto final y son homotópicos.*

Definición 2.10. Dada una superficie de Riemann M y un cubrimiento analítico conexo $p : M' \longrightarrow M$, p es un *cubrimiento universal* de M si para cada otro cubrimiento conexo $q : N \longrightarrow M$, y para cada elección de puntos $y_0 \in M'$, $z_0 \in N$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe una única función $f : M' \longrightarrow N$ tal que $f(y_0) = z_0$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dotted, "f"] & \\ & N \arrow[dl, "q"] \\ M & \end{tikzcd}$$

conmuta. Denotaremos por $\widetilde{M}$ el espacio M' correspondiente al dominio del cubrimiento universal.

Teorema 2.11 ([For81]). *Si M y N son superficies de Riemann conexas, N es simplemente conexa y $p : N \longrightarrow M$ es un cubrimiento holomorfo. Entonces p es el cubrimiento universal de M.*

Teorema 2.12 ([For81]). *Supongamos que M es una superficie de Riemann conexa. Entonces existe una superficie de Riemann simplemente conexa $\widetilde{M}$ y un cubrimiento holomorfo $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$.*

Demostración. Fijemos $a \in M$. Por $\pi(a, x)$ denotamos el conjunto de clases de caminos con punto inicial a y punto final x. Sea $\widetilde{M}_a = \{(x, [\alpha]) \mid x \in M,\ [\alpha] \in \pi(a, x)\}$.
Supongamos que $(x, [\alpha]) \in \widetilde{M}_a$ y que $U \subset M$ es una vecindad de x abierta y simplemente conexa. Entonces definimos $U_\alpha \subset \widetilde{M}_a$ como el conjunto de todos los puntos $(y, [\beta]) \in \widetilde{M}_a$ tales que $y \in U$ y $\beta = \alpha\frown\zeta$, donde ζ es un camino de a a y completamente dentro de U (como U es simplemente conexo, su clase de homotopía sólo depende de los extremos).
Dotamos a $\widetilde{M}_a$ de la topología generada por los conjuntos U_α. Con esta topología, $\widetilde{M}_a$ es una superficie de Riemann conexa y simplemente conexa y la aplicación $p : \widetilde{M}_a \longrightarrow M$ por $p(x, [\alpha]) = x$ es holomorfa. Los detalles se pueden encontrar en [For81]. □

2.3. Uniformización de superficies de Riemann.

Definición 2.13. Sea $p : N \longrightarrow M$ un cubrimiento holomorfo. Un automorfismo de p es un automorfimo $f \in \mathrm{Aut}(N)$ tal que $f \circ p = p$, es decir, que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & N \arrow[dl, "p"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

conmute. El grupo de automorfismos de p se denota por $\mathrm{Aut}(N/M)$. Este grupo actúa sobre N por $\mathrm{Aut}(N/M) \times N \longrightarrow N : (f, y) \longmapsto f(y)$.

Definición 2.14. Un cubrimiento holomorfo $p : N \longrightarrow M$ es de *Galois* si su grupo de automorfismos actúa de manera transitiva en las fibras de p, es decir, para cada $x \in M$ y cada par de puntos $y_0,\ y_1 \in p^{-1}(\{x\})$ existe $f \in \mathrm{Aut}(N/M)$ tal que $f(y_0) = y_1$.

Teorema 2.15 ([For81]). *Sea M una superficie de Riemann y $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un cubrimiento universal. Entonces $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ es de Galois y su grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(M; a)$, con $a \in M$.*

Demostración. Sea $x \in M$ y y_0, $y_1 \in p^{-1}(\{x\})$. Por la propiedad del cubrimiento universal, existen cubrimientos holomorfos f, $g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ tales que $f(y_0) = y_1$ y $g(y_1) = y_0$. Así $f \circ g(y_1) = y_1$ y $g \circ f(y_0) = y_0$, entonces por la unicidad en la definición del cubrimiento universal, $f \circ g$ y $g \circ f$ son la identidad sobre $\widetilde{M}$. Por lo tanto f es un automorfismo de p tal que $f(y_0) = y_1$, luego $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ actúa transitivamente sobre las fibras de p, es decir, $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ es de Galois.
Ahora, fijemos $x \in M$ y $\widetilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$. Definimos $\Phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M) \longrightarrow \pi_1(M; x)$ la aplicación que envía $f \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ a la clase de homotopía de $p \circ \eta$, donde η es un camino en $\widetilde{M}$ de $\widetilde{x}$ a $f(\widetilde{x})$. Φ está bien definida puesto que p es una función continua (y por lo tanto su inducida en caminos envía caminos homotópicos en caminos homotópicos), $p \circ \eta$ es un camino cerrado en x y la clase de η sólo depende de sus extremos (debido a que $\widetilde{M}$ es simplemente conexo).
Supongamos que f, $g \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ y η, ζ son caminos en $\widetilde{M}$ de $\widetilde{x}$ a $f(\widetilde{x})$ y $g(\widetilde{x})$, respectivamente. Entonces $f \circ \zeta$ es un camino con punto inicial en $f(\widetilde{x})$ y punto final $f \circ g(\widetilde{x})$. También $p \circ (f \circ \zeta) = (p \circ f) \circ \zeta = p \circ \zeta$. El camino $\eta^\frown(f \circ \zeta)$ es un camino de $\widetilde{x}$ a $f \circ g(\widetilde{x})$. Así

$$\Phi(fg) = [p \circ (\eta^\frown(f \circ \zeta))] = [p \circ \eta] \cdot [p \circ (f \circ \zeta)] = [p \circ \eta] \cdot [p \circ \zeta] = \Phi(f) \cdot \Phi(g).$$

Si $\Phi(f) = [p \circ \eta]$ es la clase de homotopía del camino c_x constante en x (el elemento identidad en $\pi_1(M; x)$). Como η es un levantamiento de $p \circ \eta$, entonces por la propiedad del levantamiento de homotopías de p, η es homotópico a $c_{\widetilde{x}}$, el camino constante a $\widetilde{x}$, luego $f(\widetilde{x}) = \eta(1) = \widetilde{x}$ y entonces $f = \mathrm{Id}_{\widetilde{M}}$. Luego Φ es inyectiva.
Si α es un lazo en basado en x y η un levantamiento de α a $\widetilde{M}$ empezando en $\widetilde{x}$, entonces $y = \alpha(1) \in p^{-1}(\{x\})$, dado que $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ actúa transitivamente, existe $f \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ tal que $f(\widetilde{x}) = y$. De la definición de Φ tenemos que $\Phi(f) = [\alpha]$. □

De este teorema, el isomorfismo Φ nos permite construir una inclusión de $\pi_1(M; x)$ en el grupo de automorfismos (holomorfos) de $\widetilde{M}$. Además $\pi_1(M; x) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ actúa en $\widetilde{M}$ de manera que $\widetilde{M}/\pi_1(M; x) \simeq M$.

Teorema 2.16 ([For81])**.** *Supongamos que M y N son superficies de Riemann conexas, $q : N \longrightarrow M$ un cubrimiento analítico y $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un cubrimiento universal de M. Sea $f : \widetilde{M} \longrightarrow N$ una aplicación que preserva las fibras, la cual existe de la definición de cubrimiento universal. Entonces f es un cubrimiento y existe un subgrupo $G \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ tales que dados dos puntos x, $x' \in \widetilde{M}$, $f(x) = f(x')$ si y sólo si existe $g \in G$ tales que $x' = g(x)$. Más aún $G \simeq \pi_1(N; n)$, para cualquier $n \in N$.*

Además, q es un cubrimiento de Galois si y sólo si el subgrupo G es normal en $\pi_1(M; x)$. En este caso se tiene que $\mathrm{Aut}(N/M) = \pi_1(M; x)/\pi_1(N; q(x))$.
Dado que en el anterior teorema $f : \widetilde{M} \longrightarrow N$ es un cubrimiento holomorfo y $\widetilde{M}$ es simplemente conexa por ser el cubrimiento universal de M, entonces por el teorema 2.11 tenemos que f es un cubrimiento universal de N.

Teorema 2.17 (Teorema de uniformización de superficies de Riemann, [FK92])**.** *Si M es una superficie de Riemann conexa y simplemente conexa, entonces M es isomorfa a una y sólo una de las superficies:*

1. *La esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$.*
2. *El plano complejo $\mathbb{C}$.*

3. *El semiplano de Poincaré $\mathcal{H}$.*

Diremos que una superficie de Riemann M es *elíptica* si $\widetilde{M} \simeq \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, que es *parabólica* si $\widetilde{M} \simeq \mathbb{C}$ o que es *hiperbólica* si $\widetilde{M} \simeq \mathcal{H}$.

Observación 2.18. *Si M es una superficie de Riemann elíptica, tenemos que su cubrimiento universal $p : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \longrightarrow M$ es una aplicación continua, luego M es compacta. Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que necesariamente $M \simeq \mathbb{C}\mathbf{P}^1$, es decir, módulo isomorfismo $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ es la única superficie de Riemann elíptica.*

Teorema 2.19 ([FK92])**.** *Si M es una superficie de Riemann parabólica, entonces M es isomorfa a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ o a un toro de la forma $\mathbb{C}/\Lambda$, con Λ un retículo en $\mathbb{C}$.*

De lo anterior podemos deducir que cualquier superficie de Riemann que no sea isomorfa a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, $\mathbb{C}^*$ o $\mathbb{C}/\Lambda$ (con Λ un retículo en $\mathbb{C}$) es hiperbólica. En este trabajo nos concentraremos en este tipo de superficies.

Teorema 2.20 ([FK92])**.** *Si G es un subgrupo de $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ es tal que existe un punto $z_0 \in \mathcal{H}$ en el que G actúa propia y discontinuamente, es decir, el estabilizador $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$ es finito y existe una vecindad abierta $U \subset \mathcal{H}$ de z_0 tal que $g(U) = U$ para todo $g \in G_{z_0}$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \backslash G_{z_0}$, entonces G es un subconjunto discreto del espacio topológico $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$.*

Definición 2.21. Una *representación* de $\pi_1(M;x)$ en $\mathrm{Aut}(\widetilde{M})$ es un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(M;x) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{M})$. Diremos que es *fiel* si ρ es injectiva y que es *discreta* si el conjunto $\mathrm{Im}\,(\rho)$ es un subconjunto discreto del espacio topológico $\mathrm{Aut}(\widetilde{M})$.

Teorema 2.22 (Uniformización de superficies de Riemann hiperbólicas)**.** *Sea M una superficie de Riemann hiperbólica y $x \in X$, entonces*

1. *Existe una representación ρ fiel y discreta de $\pi_1(M;x)$ en $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que $\Gamma := \mathrm{Im}\,(\rho)$ actúa de manera libre en $\mathcal{H}$ y además $\mathcal{H}/\Gamma \simeq M$.*
2. *Si ρ' es otra representación de $\pi_1(M;x)$ en $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ con las mismas propiedades, entonces existe $g \in \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ y $\delta \in \mathrm{Aut}(\pi_1(M;x))$ tal que $\rho' = Ad_g \circ \rho \circ \delta^{-1}$.*

Demostración. 1. Consideramos $p : \widetilde{M}_x \longrightarrow M$ el cubrimiento universal descrito en el teorema 2.12. Sea $\varphi : \widetilde{M}_x \longrightarrow \mathcal{H}$ un isomorfismo de superficies de Riemann fijo. Como $\pi_1(M;x) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_x/M) = \{f \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_x) \mid p \circ f = p\}$, donde $p : \widetilde{M}_x \longrightarrow M$ es un cubrimiento universal. Entonces sea

$$\rho : \begin{array}{ccc} \pi_1(M;x) & \longrightarrow & \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}.$$

Tenemos que $\rho(f \circ g) = \varphi \circ f \circ g \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = \rho(f) \circ \rho(g)$, luego ρ es un homomorfismo de grupos. Si $\rho(f) = \rho(g)$ entonces $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$, luego $f = g$ y ρ es inyectiva.

Ahora tenemos que $\Gamma = \mathrm{Im}\,(\rho)$ es un subgrupo de $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$. Si $z \in \mathcal{H}$ y $g \in \Gamma$ son tales que $g(z) = z$, dado que existe $f \in \pi_1(M;x)$ tal que $g = \rho(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, se tiene que si $y = \varphi^{-1}(z)$ entonces $f(y) = y$, luego $f = \mathrm{Id}_{\widetilde{M}_x}$ y $g = \rho(\mathrm{Id}_{\widetilde{M}_x}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, por ende $\Gamma_z = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\}$, luego la acción es libre.

Sea $\widetilde{x}$ un punto en la fibra $p^{-1}(\{x\})$ y $z_0 = \varphi(\widetilde{x})$. Dado que $p : \widetilde{M_x} \longrightarrow M$ es un cubrimiento, existe una vecindad $V \subset M$ de x tal que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$. Sea α_0 tal que $\widetilde{x} \in U_{\alpha_0}$ y $U' = U_{\alpha_0}$ entonces $p|_{U'}$ es un homeomorfismo. Sea $U = \varphi(U') \subset \mathcal{H}$, la cual es una vecindad de z_0. Si $g \in \Gamma$ es tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ entonces $\varphi^{-1}(g(U) \cap U) \neq \emptyset$, pero $\varphi^{-1}(g(U) \cap U) = f(U') \cap U'$ con $f = \rho^{-1}(g)$. Pero si $f(U') \cap U' \neq \emptyset$, hay un elemento $u \in U'$tal que $f(u) \in U'$. Pero entonces $p^{-1}(\{p(u)\}) \cap U' = u$, y dado que f preserva las fibras, $f(u) = u$, luego $f = \mathrm{Id}_{\widetilde{M_x}}$ y $g = \rho(\mathrm{Id}_{\widetilde{M_x}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. Entonces $g(U) = U$ para todo $g \in \Gamma_{z_0}$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma \setminus \Gamma_{z_0}$. Por el teorema 2.20 tenemos que Γ es un subconjunto discreto de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Como Γ es un grupo que actúa libre y discontinuamente, entonces el cociente $\mathcal{H}/\Gamma$ tiene estructura de superficie de Riemann. Sea

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}/\Gamma & \longrightarrow & M \\ h \cdot \Gamma & \longmapsto & p(\varphi^{-1}(h)) \end{array},$$

así, si $h' = g(h)$ para $g = \rho(f) \in \Gamma$, entonces $\varphi^{-1}(h') = f(\varphi^{-1}(h))$ y $p(\varphi^{-1}(h')) = p(f(\varphi^{-1}(h))) = p(\varphi^{-1}(h))$, así que ϕ está bien definida.

Si $\phi(h \cdot \Gamma) = \phi(h' \cdot \Gamma)$, entonces $p(\varphi^{-1}(h)) = p(\varphi^{-1}(h'))$, luego existe $f \in \pi_1(M; x)$ tal que $\varphi^{-1}(h) = f(\varphi^{-1}(h'))$, de donde $h = \varphi \circ f(\varphi^{-1}(h')) = \rho(f)(h')$, por lo que h y h' están en la misma órbita bajo Γ y ϕ es injectiva.

Para cada $m \in M$, tenemos que si $\widetilde{m}$ es un punto en la fibra de m, entonces $m = p(\varphi^{-1}(\varphi(\widetilde{m}))) = \phi(\varphi(\widetilde{m} \cdot \Gamma)$, por lo tanto ϕ es sobreyectiva.

Ahora, si denotamos $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/\Gamma$, como la acción es libre y discontinua, existe una vecindad $U \subset \mathcal{H}$ de h tal que $\pi|U$ es un homeomorfismo y tal que $p|_{\varphi^{-1}(U)}$ también lo sea. Luego

$$\pi(U) \xrightarrow{\pi|_U^{-1}} U \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{p|_{\varphi^{-1}(U)}} p(\varphi^{-1}(U))$$

lo que implica que ϕ está dada localmente por la composición de funciones holomorfas, luego es holomorfa.

Dado que ϕ es una bijección holomorfa, por la proposición 2.3 tenemos que ϕ es un isomorfismo de superficies de Riemann.

2. Supongamos que ρ' es otra representación de $\pi_1(M; x)$ en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ con las mismas propiedades, entonces sea $\Gamma' = \mathrm{Im}\,(\rho')$ y $\phi' : \mathcal{H}/\Gamma' \longrightarrow M$. Dados $\widetilde{x}$ un punto en la fibra $p^{-1}(\{x\})$ y $h \in \phi'^{-1}(x)$, existe $\varphi' := \widetilde{\phi'^{-1}} : \widetilde{M_x} \longrightarrow \mathcal{H}$. Sea $g = \varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. Entonces para $f \in \pi_1(M; x)$ tenemos que

$$Ad_g \circ \rho(f) = g \circ \rho(f) \circ g^{-1} = \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \varphi'^{-1} = \varphi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$$

es un automorfismo γ de $\mathcal{H}$ tal que $\varphi'^{-1} \circ \gamma \circ \varphi' \in \pi_1(M; x)$, luego $\gamma \in \Gamma' = \mathrm{Im}\,(\rho')$, entonces podemos definir

$$\delta : \begin{array}{ccc} \pi_1(M; x) & \longrightarrow & \pi_1(M; x) \\ f & \longmapsto & \rho'^{-1} \circ Ad_g \circ \rho(f) \end{array}.$$

así $\delta \in \mathrm{Aut}(\pi_1(M; x))$ es tal que $\rho' = Ad_g \circ \rho \circ \delta^{-1}$. □

En [Hit92] Hitchin dio una descripción del espacio Teichmüller de la superficie como el espacio de representaciones fieles y discretas del grupo fundamental de una superficie hiperbólica de Riemann en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ módulo la acción de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$

(que actúa por conjugación). Basándose en el teorema de Dehn–Nielsen ([Nie27]) que afirma que los automorfismos exteriores del grupo fundamental de una superficie orientable y sin borde conforman su *mapping class group* o grupo modular de Teichmüller, el cual actúa sobre el espacio de Teichmüller como automorfismos de éste que preservan y recorren las distintas parametrizaciones de una misma estructura de superficie de Riemann para el espacio topológico subyacente a la superficie original. El cociente del espacio de Teichmüller sobre la acción del grupo de automorfismos exteriores es isomorfo al espacio modular de la superficie.

3. Curvas algebraicas reales

Una superficie de Klein es una 2-variedad dotada de un atlas maximal $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ para el cual las funciones de transición son funciones dianalíticas entre abiertos de $\mathbb{C}$ o abiertos del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, es decir, las funciónes $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ son analíticas o anti-analíticas en el interior de su dominio y además envían números reales en números reales. Una superficie de Klein puede tener borde o ser no orientable.

El cociente de una superficie de Riemann por una involución anti-holomorfa tiene estructura de superficie de Klein. Además, para cada superficie de Klein X existe una superficie de Riemann M y una involución anti-holomorfa σ de M tal que M/σ es isomorfa a X como superficie de Klein. Luego hay una equivalencia entre superficies de Klein y pares (M, σ) de una superficie de Riemann dotada con una involución anti-holomorfa.

Definición 3.1. Una *curva algebraica real* es un par (M, σ) de una superficie de Riemann y una involución anti-holomorfa de M.

Si consideramos el toro $M := \mathbb{C}/\Gamma$, donde el grupo $\Gamma = \{z \longmapsto z+n+im \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ junto con las aplicaciones en M dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_1 : M \longrightarrow M :&[z] \longmapsto [\bar{z}] \\ \sigma_2 : M \longrightarrow M :&[z] \longmapsto [i\bar{z}] \\ \sigma_3 : M \longrightarrow M :&[z] \longmapsto [\bar{z} + \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

las cuales dan lugar a distintas curvas algebraicas reales, cuyo cociente es homeomorfo a un anillo, una banda de Möbius y una botella de Klein, respectivamente.

Definición 3.2. Un homomorfismo f entre dos curvas algebraicas reales (M, σ), (N, τ) es una aplicación holomorfa $f : M \longrightarrow N$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "\sigma"] & N \end{tikzcd}$$

conmuta.

En particular, si $M = N$ entonces un isomorfismo entre las curvas algebraicas reales (M, σ) y (M, τ) es un automorfismo de la superficie de Riemann M tal que $f \circ \sigma = \tau \circ f$, es decir $\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Por lo tanto, (M, σ) y (M, τ) son isomorfas como curvas algebraicas reales si y sólo si σ y τ son conjugadas la una de la otra por un automorfismo holomorfo de M.

En la esfera de Riemann $M = \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ consideremos las dos estructuras reales

$$\sigma_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array},$$

$$\sigma_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \\ z & \longmapsto & -\frac{1}{\bar{z}} \end{array}.$$

Tenemos que el conjunto de puntos reales de la primera estructura M^{σ_1} es el conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \simeq S^1$ mientras que para la segunda estructura si $z = -\frac{1}{\bar{z}}$, entonces $|z|^2 = -1$, de donde $M^{\sigma_2} = \emptyset$. Como los conjuntos de puntos reales no son homeomorfos, las estructuras reales no pueden ser congujadas, es decir, las curvas (M, σ_1) y (M, σ_2) no son isomorfas.

El plano complejo $\mathbb{C}$ tiene una estructura real canónica dada por la conjugación compleja. El disco $\mathcal{D}$ es invariante bajo la conjugación compleja y ésta es una estructura real en él, bajo la transformación de Cayley, esta estructura se puede inducir en $\mathcal{H}$ y resulta $\tau_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : z \longmapsto -\bar{z}$. Si $z = a + bi$, entonces $\tau_0(z) = -a + bi$ es el reflejo de z respecto al eje imaginario. De hecho, τ_0 la estructura canónica en $\mathcal{H}$ es la única módulo isomorfismo.

Lema 3.3. *El semiplano superior de Poincaré $\mathcal{H}$ tiene una única estructura real salvo conjugación.*

Demostración. Sea $\tau_0 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : z \longmapsto -\bar{z}$ y sea σ una estructura real en $\mathcal{H}$. Como $\sigma \circ \tau_0$ es una biyección holomorfa en $\mathcal{H}$, es un automorfismo. Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ tal que $f = \sigma \circ \tau_0$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como matriz asociada, la cual puede ser escogida de determinante 1. Entonces

$$\sigma(z) = \sigma \circ \tau_0^2(z) = f \circ \tau_0(z) = f(-\bar{z}) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}.$$

Como $\sigma^2 = Id_{\mathcal{H}}$, entonces

$$z = \sigma^2(z) = \sigma\left(\frac{-a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}\right) = \frac{(a^2 - bc)z + b(d - a)}{c(a - d)z + d^2 - bc}$$

de donde $a^2 - bc = d^2 - bc$ and $b(d - a) = c(a - d) = 0$; como $ad - bc = 1$, tenemos $a = d$.

Dado que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ está en la misma clase de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, podemos asumir $a > 0$.

Considere $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ el automorfismo correspondiente a la matriz $\begin{pmatrix} a + 1 & -b \\ \frac{-c}{2(a+1)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, el cual está bien definido pues $a \neq -1$ y el determinante de esta matriz es igual a $(a + 1) * \frac{1}{2} - \frac{-c}{2(a+1)} * (-b) = \frac{(a+1)^2 - bc}{2(a+1)} = \frac{1+2a+a^2-bc}{2(a+1)} = \frac{2a+2}{2(a+1)} = 1$. La inversa de g

tiene $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{c}{2(a+1)} & a+1 \end{pmatrix}$ como matriz asociada. Por lo tanto, si $z \in \mathcal{H}$ entonces

$$\tau_0 \circ g \circ \tau_0(z) = \tau_0 \circ g(-\bar{z}) = \tau_0 \left(\frac{-(a+1)\bar{z} - b}{\frac{c}{2(a+1)}\bar{z} + \frac{1}{2}} \right) = \frac{(a+1)z + b}{\frac{c}{2(a+1)}z + \frac{1}{2}}$$

por lo cual $\tau_0 \circ g \circ \tau_0$ tiene $\begin{pmatrix} a+1 & b \\ \frac{c}{2(a+1)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ como matriz asociada. Luego a $g^{-1} \circ \tau_0 \circ g \circ \tau_0$ le corresponde la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ \frac{c}{2(a+1)} & a+1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a+1 & b \\ \frac{c}{2(a+1)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} + \frac{bc}{2(a+1)} & \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} + \frac{c}{2} & \frac{bc}{2(a+1)} + \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$$

como $\frac{a+1}{2} + \frac{bc}{2(a+1)} = \frac{(a+1)^2 + bc}{2(a+1)} = \frac{a^2+2a+1+bc}{2(a+1)} = \frac{2a^2+2a}{2(a+1)} = a$. Entonces $g^{-1} \circ \tau_0 \circ g \circ \tau_0 = f$ y $\sigma = \sigma \circ \tau_0^2 = f \circ \tau_0 = g^{-1} \circ \tau_0 \circ g \circ \tau_0 \circ \tau_0 = g^{-1} \circ \tau_0 \circ g$ y por lo tanto cada estructura real en $\mathcal{H}$ es conjugada de τ_0.

□

Esta estructura real induce una involución en $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ definida por

$$u \longmapsto \tau_0 \circ u \circ \tau_0,$$

y podemos considerar el producto semidirecto $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes_{\tau_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En particular tenemos la sucesión exacta corta de grupos

$$(\star) \qquad 1 \longrightarrow \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes_{\tau_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

Este grupo está fácilmente identificado.

Lema 3.4. *El grupo* $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes_{\tau_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *es isomorfo a* $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ *y la sucesión exacta corta* $(\star)$ *es isomorfa a*

$$1 \longrightarrow \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

El isomorfismo es la aplicación $\Psi : \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes_{\tau_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow$ determinado por $\Psi(A) = A$ si $A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \rtimes_{\tau_0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y por $\Psi(\tau_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1. Grupo fundamental real.

Definición 3.5. Sea (M, σ) una curva algebraica real y sean $x \in M$ y $p : \widetilde{M}_x \longrightarrow M$ el cubrimiento universal de M definido en 2.12. El *grupo fundamental real* de (M, σ) es el subgrupo del grupo de difeomorfismos de $\widetilde{M}_x$ definido por

$$\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) := \{f : \widetilde{M}_x \longrightarrow \widetilde{M}_x \mid p \circ f = \alpha_f \circ p,\ \alpha_f \in \{\mathrm{Id}_M,\ \sigma\}\}$$

Es decir, es el grupo de transformaciones de $\widetilde{M}_x$ que inducen o la identidad en M o la estructura real σ. Debido a que p es un homeomorfismo local, si una función $f \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ satisface que $p \circ f = \sigma \circ p$, entonces f es anti-holomorfa; si f es tal que $p \circ f = p$ (en caso que $\alpha_f = \mathrm{Id}_M$), entonces f es una transformación holomorfa, luego $f \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_x/M) \simeq \pi_1(M; x)$. Luego $\pi_1(M; x) = \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \cap \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_x/M) \subset \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$. Esta contenencia es propia gracias al siguiente lema.

Lema 3.6. *Sea (M,σ) una curva algebraica real con M conexa y sea $x \in M$. Si $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ es un cubrimiento universal de M. Para cada $\widetilde{x}$ y cada $\widetilde{\sigma(x)}$ puntos en la fibra $p^{-1}(\{x\})$ y $p^{-1}(\{\sigma(x)\})$ respectivamente, existe $\widetilde{\sigma} \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ tal que $\widetilde{\sigma}(\widetilde{x}) = \widetilde{\sigma(x)}$ y $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma \circ p$.*

Demostración. Sea $\widetilde{\gamma}$ un camino en $\widetilde{M}$ de $\widetilde{x}$ a $\widetilde{\sigma(x)}$. Entonces $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$ es un camino en M de x a $\sigma(x)$. Dada un elemento $y \in M$, tomamos α un camino en $\widetilde{M}$ de $\widetilde{x}$ a y. Como $\widetilde{M}$ es simplemente conexo, cualquier otro camino de $\widetilde{x}$ a y es homótopo a α.

El camino $\gamma^\frown(\sigma \circ p \circ \alpha)$ es un camino en M empezando en x. Sea β el levantamiento de este camino con respecto a $\widetilde{x}$, un camino en $\widetilde{M}$. Definimos $\widetilde{\sigma}(y) = \beta(1)$. Tenemos que $\widetilde{\sigma}$ está bien definido pues p envia y levanta caminos homótopos en caminos homótopos, y caminos homótopos tienen las mismas terminaciones.

Además $p(\widetilde{\sigma}(y)) = p \circ \beta(1) = \gamma^\frown(\sigma \circ p \circ \alpha)(1) = \sigma \circ p \circ \alpha(1) = \sigma \circ p(y)$, de donde $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma \circ p$.

Si $c_{\widetilde{x}}$ es el camino constante en $\widetilde{x}$, entonces $\sigma \circ p \circ c_{\tilde{x}} = c_{\sigma(x)}$ y $\gamma^\frown(\sigma \circ p \circ \alpha) = \gamma^\frown c_{\sigma(x)}$ es homotopo a γ, y su levantamiento por p es homótopo a $\widetilde{\gamma}$, así $\widetilde{\sigma}(\tilde{x}) = \widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\sigma(x)}$. □

En el lema anterior tenemos que la transformación antiholomorfa $\widetilde{\sigma}$ sólo depende del camino $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$. Por la definición de $\widetilde{\sigma}$, si tomamos otro camino γ' de x a $\sigma(x)$ homotópicamente no equivalente, tendremos una transformación anti-holomorfa distinta. Como veremos en la siguiente proposición, hay tantas clases de equivalencia de caminos de x a $\sigma(x)$ como elementos anti-holomorfos en $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$.

Decimos que $x \in M$ es un *punto real* si $\sigma(x) = x$. Para un punto no real x de M tenemos una descripción por caminos del grupo fundamental real.

Proposición 3.7. *Si $x \in M$ es un punto no real, entonces el grupo fundamental real $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ es isomorfo al grupo de clases de homotopía de lazos basados en x o de caminos de x a $\sigma(x)$, junto con la operación*

$$[\gamma]\cdot[\eta] = \begin{cases} [\gamma^\frown \eta] & \text{si } \gamma \text{ es un lazo basado en } x \\ [\gamma^\frown(\sigma \circ \eta)] & \text{si } \gamma \text{ es un camino de } x \text{ a } \sigma(x) \end{cases}$$

Demostración. Sea $\Pi = \{[\eta] \mid \eta(0) = x,\ \eta(1) \in \{x, \sigma(x)\}\}$ y sea $\widetilde{x} \in \widetilde{M_x}$ un punto fijo en la fibra $p^{-1}(\{x\})$, entonces para cada $f \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ tomamos η un camino en $\widetilde{M_x}$ de $\widetilde{x}$ a $f(\widetilde{x})$ y definimos

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) & \longrightarrow & \Pi \\ f & \longmapsto & [p \circ \eta] \end{array}.$$

La cual está bien definida por ser $\widetilde{M_x}$ simplemente conexa.

Supongamos que $f,\, g \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ y η, ζ son caminos en $\widetilde{M_x}$ de $\widetilde{x}$ a $f(\widetilde{x})$ y $g(\widetilde{x})$, respectivamente. Entonces $f \circ \zeta$ es un camino con punto inicial en $f(\widetilde{x})$ y punto final $f \circ g(\widetilde{x})$. También $p \circ (f \circ \zeta) = (p \circ f) \circ \zeta = \alpha_f \circ p \circ \zeta$. El camino $\eta^\frown(f \circ \zeta)$ es un camino de $\widetilde{x}$ a $f \circ g(\widetilde{x})$. Así

$$\Psi(f \circ g) = [p \circ (\eta^\frown(f \circ \zeta))] = [(p \circ \eta)^\frown(p \circ (f \circ \zeta))] = [p \circ \eta^\frown \alpha_f \circ p \circ \zeta]$$

si α_f es la identidad, $p \circ \eta$ es un lazo basado en x; si $\alpha_f = \sigma$, $p \circ \eta$ es un camino de x a $\sigma(x)$, luego por la definición de la operación en Π, tenemos que

$$\Psi(f \circ g) = [p \circ \eta^\frown \alpha_f \circ p \circ \zeta] = [p \circ \eta] \cdot [p \circ \zeta] = \Psi(f) \cdot \Psi(g).$$

Si $\Phi(f) = [c_x]$ la clase de homotopía del camino constante a $x \in M$, entonces $p \circ \eta \sim c_x$, de donde $\eta \sim c_{\widetilde{x}}$, luego $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ y además f es holomorfa (de lo contrario $p \circ f(\widetilde{x}) = \sigma(x) \neq x$), por lo que necesariamente $f = \mathrm{Id}_{\widetilde{M_x}}$ y Φ es injectiva.

Dado una clase $[\gamma] \in \Pi$, si γ es un lazo basado en x, existe $f \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M_x})$ tal que $\Phi(f) = [\gamma]$, de lo contrario el levantamiento de γ por p con respecto a $\widetilde{x}$ es un camino de $\widetilde{x}$ a un punto en la fibra de $p^{-1}(\{\sigma(x)\})$, por el lema 3.6 existe $\widetilde{\sigma} \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ con $\Phi(\widetilde{\sigma}) = [\gamma]$. Por lo tanto Φ es sobrejectivo. □

Si tenemos dos elementos f, $g \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ que cubren σ, entonces $\sigma \circ p = \sigma \circ (p \circ g) \circ g^{-1} = \sigma^2 \circ p \circ g^{-1} = p \circ g^{-1}$ y así $p \circ (f \circ g^{-1}) = (p \circ f) \circ g^{-1} = (\sigma \circ p) \circ g^{-1} = \sigma^2 \circ p = p$. Luego $h = f \circ g^{-1} \in \pi_1(M; x)$, es decir, dos elementos anti-holomorfos difieren por un elemento en $\pi_1(M; x)$.

Proposición 3.8. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f & \longmapsto & \begin{cases} 1 & si\ f \circ p = p \\ -1 & si\ f \circ p = \sigma \circ p \end{cases} \end{array}$$

es un epimorfismo de grupos cuyo núcleo es $\pi_1(M; x)$. Luego la sucesión

$$1 \longrightarrow \pi_1(M; x) \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta.

Diremos que una curva algebraica real (M, σ) es parabólica, elíptica o hiperbólica si M lo es.

Definición 3.9. Para una curva algebraica real hiperbólica, una representación *real* de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ es un homomorfismo de grupos $\rho_{\mathbb{R}} : \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \longrightarrow \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ tal que si $\rho = \rho_{\mathbb{R}}|_{\pi_1(M;x)}$ entonces ρ cumple con $\mathrm{Im}\,(\rho) \subset \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$. Es decir, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(M; x) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \arrow[r] \arrow[d, "\rho'"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \arrow[r] & \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R}) \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Es *fiel* si $\rho_{\mathbb{R}}$ es inyectiva. Es *discreta* si el grupo $\mathrm{Im}\,(\rho_{\mathbb{R}})$ es un subconjunto discreto de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$.

Observación 3.10. *Si G es un subgrupo discreto de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$, el subgrupo $G_0 = G \cap \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo discreto de automorfismos de $\mathcal{H}$. haciendo que el cociente $\mathcal{H}/G_0$ tenga estructura de superficie de Riemann (se puede consultar* [FK92] *para detalles sobre la construcción del atlas holomorfo). Además, si el grupo G es una extensión de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por G_0, entonces el cociente $\mathcal{H}/G_0$ tiene una estructura real dada por el elemento no trivial en G/G_0. Supongamos que $G/G_0 \simeq \{1, \tau\}$, donde*

$\tau = [B]$ es la clase de un elemento en G de determinante negativo, entonces γ_B es una biyección anti-holomorfa de $\mathcal{H}$ y

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}/G_0 & \longrightarrow & \mathcal{H}/G_0 \\ h \cdot G_0 & \longmapsto & \gamma_B(h) \cdot G_0 \end{array}$$

donde γ_B es el automorfismo asociado; si $B' \in \tau$ es otro representante, existe $g \in G$ tal que $\gamma_{B'}(h) = g \cdot \gamma_B(h)$, luego $\gamma_B(h) \cdot G_0 = \gamma_{B'}(h) \cdot G_0$ y así, la acción de τ sobre el cociente $\mathcal{H}/\Gamma$ está bien definida. Además $\tau^2(h) = \gamma_B^2(h) \cdot G_0 = h \cdot G_0$ puesto que $B^2 \in G$ y tiene determinante positivo. Dado que τ está dado localmente por aplicar γ_B, es una involución anti-holomorfa de $\mathcal{H}/\Gamma$. Esta curva algebraica real la denotaremos por $(\mathcal{H}/G_0, G/G_0)$.

Para extensiones del grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, diremos que un homomorfismo $\gamma : G \longrightarrow G'$ respeta extensiones si para $\gamma_0 := \gamma|_{G_0}$ tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & G_0' \arrow[r] & G' \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, si es un homomorfismo de extensiones. Denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ y por $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ a los homomorfismos y a las automorfismos que respetan extensiones, respectivamente.

Teorema 3.11 (Uniformización de curvas algebraicas reales hiperbólicas)**.** *Sea (M, σ) una curva algebraica real hiperbólica y $x \in M$. Entonces*

1. *existe una representación real, fiel y discreta $\rho_{\mathbb{R}}$ de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ en $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ tal que los grupos $\Gamma_{\mathbb{R}} = \mathrm{Im}(\rho_{\mathbb{R}})$ y $\Gamma = \rho_{\mathbb{R}}(\pi_1(M; x))$ satisfacen que*
$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}} \xrightarrow{det} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$
es una suceción exacta corta, Γ actúa libremente en $\mathcal{H}$ y además
$$(M, \sigma) \simeq (\mathcal{H}/\Gamma, \Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma)$$
como curvas algebraicas reales.
2. *si $\rho'_{\mathbb{R}}$ es otra representación real de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ con las mismas propiedades, entonces existe $g \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ y $\delta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x))$ tal que $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$.*

Demostración. 1. Sea $\varphi : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{H}$ un isomorfismo de superficies de Riemann fijo. Sea

$$\rho_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) & \longrightarrow & \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}.$$

Sean $f, g \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$, entonces $\rho(f \circ g) = \varphi \circ f \circ g \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = \rho(f) \circ \rho(g)$, luego ρ es un homomorfismo de grupos. Si $\rho_{\mathbb{R}}(f) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, entonces $f = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\widetilde{M}}$, luego $\rho_{\mathbb{R}}$ es inyectiva. Como $\rho_{\mathbb{R}}$ es un monomorfismo de grupos, entonces $\Gamma := \rho_{\mathbb{R}}(\pi_1(M; x)) \simeq \pi_1(M; x)$ está incluido propiamente en $\Gamma_{\mathbb{R}} := \mathrm{Im}\,(\rho_{\mathbb{R}}) \simeq \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$, y si A, $B \in \Gamma_{\mathbb{R}} \setminus \Gamma$, entonces tenemos que existen f, $g \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \setminus \pi_1(M; x)$ tales que $A = \rho_{\mathbb{R}}(f)$, $B = \rho_{\mathbb{R}}(g)$. Dado que $f \circ g^{-1} \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$, entonces $AB^{-1} \in \Gamma$, de donde la sucesión

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}} \xrightarrow{det} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta. Tenemos que Γ actúa en $\mathcal{H}$ por la acción heredada de $\pi_1(M;x) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/M)$ sobre $\widetilde{M}$, como mostramos en el teorema 2.22 esta acción es libre y discontinua. Como $\Gamma \subset \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ actúa discontinuamente, por el teorema 2.20 tenemos que Γ es un subconjunto discreto de $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$. Además, para un elemento $A \in \Gamma_{\mathbb{R}} \setminus \Gamma$ tenemos que $\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma \sqcup (A \cdot \Gamma)$, con $A \cdot \Gamma \subset \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}) \setminus \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$, dado que Γ es un subconjunto discreto y la multiplicación a izquierda por un elemento es un homeomorfismo, tenemos que $A \cdot \Gamma$ es un subconjunto discreto de la componente conexa $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}) \setminus \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$. Dado que $\Gamma_{\mathbb{R}}$ es una unión disjunta de dos subconjuntos discretos, cada uno en diferentes componentes conexas, es un subconjunto discreto de $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{R})$.

Como $\Gamma_{\mathbb{R}}$ es un subgrupo discreto, el cual es una extesión de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}} \cap \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$, por la observación 3.10 tenemos que $\mathcal{H}/\Gamma$ es una superficie de Riemann, la cual posee una estructura real dada por el elemento no trivial de $\Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma \simeq \{1,\tau\}$. Sea

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}/\Gamma & \longrightarrow & M \\ h \cdot \Gamma & \longmapsto & p(\varphi^{-1}(h)) \end{array},$$

el cual es un isomorfismo de superficies de Riemann. Tenemos que si $h \in \mathcal{H}$ entonces

$$\begin{aligned} \sigma \circ \psi(h \cdot \Gamma) &= \sigma(p(\varphi^{-1}(h))) \\ &= p \circ \widetilde{\sigma}(\varphi^{-1}(h)) \\ &= p \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_B \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(h) \\ &= p \circ \varphi^{-1}(\gamma_B(h)) \\ &= \psi \circ \tau(h) \end{aligned}$$

Luego ψ es un isomorfismo de curvas algebraicas reales.

2. Ahora, si $\rho'_{\mathbb{R}}$ es otra representación real de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ con las mismas propiedades, entonces sean $\Gamma'_{\mathbb{R}} = \mathrm{Im}\,(\rho'_{\mathbb{R}})$, $\Gamma' = \rho'_{\mathbb{R}}(\pi_1(M;x))$ y $\psi' : \mathcal{H}/\Gamma' \longrightarrow M$. Entonces tenemos que

$$(\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma') \overset{\psi'}{\simeq} (M,\sigma)$$

como curvas algebraicas reales. Usaremos este isomorfismo para encontrar g.

Dados $\widetilde{x}$ un punto en la fibra $p^{-1}(\{x\})$ y $h \in \psi'^{-1}(x)$, existe $\varphi' := \widetilde{\psi'^{-1}} : \widetilde{M}_x \longrightarrow \mathcal{H}$. Sea $g = \varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. Entonces para $f \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ tenemos que

$$Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}}(f) = g \circ \rho(f) \circ g^{-1} = \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \varphi'^{-1} = \varphi' \circ f \circ \varphi'^{-1}.$$

Sea $\gamma = \varphi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$, entonces $\gamma \in \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R})$ es tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M}_x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi'"] & \widetilde{M}_x \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

conmuta. De aquí, γ es una transformación de $\mathcal{H}$ que induce en el cociente $\mathcal{H}/\Gamma'$ un elemento en $\Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma'$. Dado que $(M,\sigma) \simeq (\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma')$, cuyo automorfismo está inducido por φ' y dado que $\pi_1^{\mathbb{R}}((\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma)'; h) = \Gamma_{\mathbb{R}'}$, entonces $\gamma \in \Gamma'_{\mathbb{R}} = \mathrm{Im}\,(\rho'_{\mathbb{R}})$.

Por lo tanto podemos definir

$$\delta : \begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) & \longrightarrow & \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) \\ f & \longmapsto & \rho_{\mathbb{R}}'^{-1} \circ Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}}(f) \end{array}$$

de donde $\delta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))$ es tal que $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$. □

Basados en la demostración anterior y usando la misma notación, tenemos que a un isomorfismo $\varphi : \widetilde{M} \simeq \mathcal{H}$, es decir, una estructura de superficie de Riemann para M, le podemos asociar una representación real $\psi(\varphi)$ de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ en $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{R})$ fiel y discreta que respecta extensiones, es decir un punto en el espacio $\mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$.

Sobre el espacio $\mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$ también tenemos una acción de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))$ dada por $\delta \cdot \rho_{\mathbb{R}} = \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$. Como $\rho_{\mathbb{R}}$ es un homomorfismo, si δ es el automorfismo interior definido por congujar por un elemento $f_0 \in \pi_1(M;x)$ tenemos que para $f \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$

$$\delta \cdot \rho_{\mathbb{R}}(f) = \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}(f) = \rho_{\mathbb{R}}(f_0^{-1} \circ f \circ f_0) = \rho_{\mathbb{R}}(f_0^{-1}) \circ \rho_{\mathbb{R}}(f) \circ \rho_{\mathbb{R}}(f_0) = Ad_{\rho_{\mathbb{R}}(f_0^{-1})} \circ \rho_{\mathbb{R}}(f)$$

y dado que $\rho_{\mathbb{R}}(f_0^{-1}) \in \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$, esta acción ya está contemplada.

Consideremos la restricción al conjunto

$$\mathrm{Out}_{\mathbb{R}} := \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))/\mathrm{Inn}(\pi_1(M;x)).$$

Si $\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$ son tales que $\mathrm{Im}\,(\rho'_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Im}\,(\rho_{\mathbb{R}})$ entonces $(\mathcal{H}/\Gamma, \Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma) = (\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma')$ y además $\delta := \rho_{\mathbb{R}}'^{-1} \circ \rho_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Aut}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))$ es tal que $\rho'_{\mathbb{R}} = \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$. Si $\delta \in \mathrm{Inn}(\pi_1(M;x))$ entonces $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}}$ para $g \in \Gamma$.

La estructura real σ está ligada a la superficie de Riemann M. Así que si quisieramos pensar en deformaciones de la estructura de curva algebraica de (M,σ), deberíamos pensar en deformaciones de la estructura de superficie de Klein de M/σ. Por la equivalencia dada, esto corresponde a una estructura real σ' sobre una superficie de Riemann M' tal que M'/σ' es homeomorfo a M/σ, el cual es el espacio topológico invariante.

Esta construcción nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.12. *Sea (M,σ) una curva algebraica real hiperbólica y $x \in M$. Hay una biyección entre clases de isomorfismo de curvas algebraicas reales (N,τ) tales que N/τ es homeomorfa a M/σ, y el conjunto $\mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$ módulo la acción de $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ y la acción de $\mathrm{Out}_{\mathbb{R}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))$.*

Demostración. Sea (M,σ) una curva algebraica real y sea $x \in M$. Si (M',σ') es una curva algebraica real isomorfa a (M,σ), existe $\psi : M \longrightarrow M'$ tal que $\sigma' = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ y $\pi_1^{\mathbb{R}}((M',\sigma');\psi(x)) \simeq \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$. Por el teorema 3.11 (usando la misma notación) tenemos que existen $\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$ tales que

$$(\mathcal{H}/\Gamma, \Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma) \overset{\phi}{\simeq} (M,\sigma) \overset{\psi}{\simeq} (M',\sigma') \overset{\phi'^{-1}}{\simeq} (\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma')$$

escogiendo puntos h, $h' \in \mathcal{H}$ en las fibras de $\phi^{-1}(x)$ y $\phi'(\psi(x))$ respectivamente, tenemos que existe $g \in \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}}$ y tomando $\delta := \rho_{\mathbb{R}}'^{-1} \circ$

$Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}}$ tenemos que $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$ y así las representaciones están en la misma órbita.

Si tenemos dos representaciones $\rho_{\mathbb{R}}$, $\rho'_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}^{fd}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x), \mathbf{PGL}(2,\mathbb{R}))$ que están en la misma órbita, entonces existen $g \in \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ y $\delta \in \mathrm{Out}_{\mathbb{R}}(\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x))$ tales que $\rho'_{\mathbb{R}} = Ad_g \circ \rho_{\mathbb{R}} \circ \delta^{-1}$, entonces por las observaciones hechas tenemos que g induce un isomorfismo en las curvas algebraicas reales $(\mathcal{H}/\Gamma, \Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma) \overset{g}{\simeq} (\mathcal{H}/\Gamma', \Gamma'_{\mathbb{R}}/\Gamma')$.
□

3.2. Cubrimientos algebraicos reales.

Definición 3.13. 1. Un cubrimiento *real* de (M,σ) es un cubrimiento $q : N \longrightarrow M$ por una curva algebraica real (N,τ) tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[d, "q"] \\
M \arrow[r, "\sigma"] & M
\end{tikzcd}$$

conmuta. Lo denotaremos por $p : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$.

2. Sea $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ un cubrimiento real, entonces un cubrimiento real $r : (N',\tau') \longrightarrow (M,\sigma)$ es un *subcubrimiento real* de q si existe $f : N \longrightarrow N'$ un cubrimiento analítico tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rrr, "\tau"] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[ddr, "q"'] & & & N \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[ddl, "q"] \\
& N' \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "r"] & N' \arrow[d, "r"'] & \\
& M \arrow[r, "\sigma"] & M &
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, es un morfismo de curvas algebraicas reales que es un cubrimiento.

Dado que $r : N' \longrightarrow M$ es un cubrimiento intermedio de q, le corresponde un subgrupo del grupo de automorfismos de q. Más aún, si $g \in \mathrm{Aut}(N/N') \subset \mathrm{Aut}(N/M)$ entonces $f \circ g = f$ y

$$f \circ (\tau \circ g \circ \tau) = \tau' \circ f \circ g \circ \tau = \tau' \circ f \circ \tau = {\tau'}^2 \circ f = f$$

luego $(\tau \circ g \circ \tau) \in \mathrm{Aut}(N/N')$, el cual es un subgrupo τ-invariante de $\mathrm{Aut}(N/M)$.

Recíprocamente, si tomamos $H \subset \mathrm{Aut}(N/M)$ el cual es τ-invariante, el cociente N/H tiene una estructura real inducida por τ definida por

$$\tau' : \begin{array}{ccc} N/H & \longrightarrow & N/H \\ [n] & \longmapsto & [\tau(n)] \end{array} .$$

Para ver que está bien definida, tomemos $n' \in [n]$, luego existe $g \in H$ tal que $g(n) = n'$ y entonces $\tau(n') = \tau(g(n)) = \tau \circ g(n) = \tau \circ g \circ \tau^2(n) = (\tau \circ g \circ \tau) \circ \tau(n) = g'(\tau(n)) \in [\tau(n)]$ donde $g' = \tau \circ g \circ \tau \in H$ (puesto que H es τ-invariante). Luego τ' está bien definida. Definiendo $r : N/H \longrightarrow M : [n] \longmapsto q(n)$ se tiene que $r \circ \tau'([n]) = r([\tau(n)]) = q(\tau(n)) = \sigma(q(n))$.

Definición 3.14. Un cubrimiento real $p : (M', \sigma') \longrightarrow (M, \sigma)$ es el *cubrimiento universal real* de (M, σ) si para cada otro cubrimiento real $q : (N, \tau) \longrightarrow (M, \sigma)$ existe $f : (M', \sigma') \longrightarrow (N, \tau)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rrr, "\sigma'"] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[ddr, "p"'] & & & M' \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[ddl, "p"] \\
& N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[d, "q"'] & \\
& M \arrow[r, "\sigma"] & M &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Si M es una superficie de Riemann y $x \in M$. Por el lema 3.6 para cualesquiera $\widetilde{x}$ y $\widetilde{\sigma(x)}$ puntos en la fibras $p^{-1}(\{x\})$ y $p^{-1}(\{\sigma(x)\})$ respectivamente, existe $\widetilde{\sigma} : \widetilde{M}_x \longrightarrow \widetilde{M}_x$ tal que $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma \circ p$ con $p : \widetilde{M}_x \longrightarrow M$ cubrimiento universal de M. Luego $p \circ \widetilde{\sigma}^2 = \sigma \circ p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma^2 \circ p = p$, por lo que $\widetilde{\sigma}^2 \in \pi_1(M; x)$. De aquí, un subcubrimiento real de p que tenga una estructura real inducida por $\widetilde{\sigma}$ estaría en correspondencia con un subgrupo del grupo de automorfismos de p que contiene $\widetilde{\sigma}^2$ y es $\widetilde{\sigma}$-invariante. El subgrupo más pequeño que satisface esto es $< \widetilde{\sigma}^2 >$ y está asociado al cubrimiento $\widetilde{M}/ < \widetilde{\sigma}^2 > \longrightarrow M$ inducido por p con la estructura real inducida por $\widetilde{\sigma}$.

Proposición 3.15. *La existencia de $\widetilde{\sigma}$ una estructura real de $\widetilde{M}_x$ que cubre σ es equivalente a que el grupo fundamental real $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ sea isomorfo a un producto semidirecto $\pi_1(M; x) \rtimes_{\widetilde{\sigma}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Demostración. Dado que la sucesión

$$1 \longrightarrow \pi_1(M; x) \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta, $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ tiene estructura de producto semidirecto si y sólo la sucesión se escinde, es decir, si existe un homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ tal que $\phi(-1) \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \setminus \pi_1(M; x)$, de forma equivalente, que exista una biyección anti-holomorfa de $\widetilde{M}_x$ de orden 2 que cubra sigma, es decir, una estructura real de $\widetilde{M}_x$ que cubre σ. $\square$

Proposición 3.16. *Si el conjunto de puntos reales $M^\sigma = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}$ es no vacío, entonces existe $\widetilde{\sigma}$ una estructura real de $\widetilde{M}_x$ que cubre a σ.*

Demostración. Tomando x un punto real de M y $\widetilde{x} = \widetilde{\sigma(x)}$ un punto en la fibra $p^{-1}(\{x\})$ aplicando el lema 3.6, existe $\widetilde{\sigma} \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x)$ tal que $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma \circ p$ y $\widetilde{\sigma}(\widetilde{x}) = \widetilde{\sigma(x)} = \widetilde{x}$.
Explícitamente, para $y \in \widetilde{M}_x$ tomamos α un camino en $\widetilde{M}_x$ de $\widetilde{x}$ a y y tomamos $\widetilde{\sigma}(y) = \beta(1)$ donde β es el levantamiento a $\widetilde{M}_x$ con respecto a $\widetilde{x}$ de $\sigma \circ p \circ \alpha$. Luego β es un camino en $\widetilde{M}_x$ de $\widetilde{x}$ a $\widetilde{\sigma}(y)$, luego $\sigma \circ p \circ \beta = \sigma \circ (\sigma \circ p \circ \alpha) = p \circ \alpha$, cuyo levantamiento con respecto a $\widetilde{x}$ es α, de donde $\widetilde{\sigma}(y) = \alpha(1) = y$. $\square$

Si x es un punto no real de M, debido a la descripción por caminos, entonces $\pi_1^{\mathbb{R}}((M, \sigma); x) \simeq \pi_1(M; x) \rtimes_{\widetilde{\sigma}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si y sólo si existe un camino γ de x a $\sigma(x)$ de orden 2, es decir, tal que el camino $\gamma^\frown(\sigma \circ \gamma)$ es homotópico al camino constante a x.

Definición 3.17. Un subgrupo $G \subset \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ se dice *real* si contiene por lo menos un elemento no holomorfo.

Supongamos que G es un subgrupo real. Como G contiene un elemento no holomorfo, entonces el homomorfismo $G \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es sobreyectivo y su núcleo es $G_0 := G \cap \pi_1(M;x)$ el subgrupo de elementos holomorfos de G. Si $\imath : G \hookrightarrow \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ es la inclusión e $\imath_0 = \imath|_{G_0}$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, "\imath_0"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\imath"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(M;x) \arrow[r] & \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

conmuta. De aquí, los subgrupos reales de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ son exactamente los subgrupos G que encajan en el diagrama anterior.

Teorema 3.18 (Correspondencia de Galois Real)**.** *Sea (M,σ) una curva algebraica real y $x \in M$ un punto de base. Hay una correspondencia entre cubrimientos reales de (M,σ) y subgrupos reales $G \subset \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$, de manera que a cubrimientos reales isomorfos les corresponde grupos conjugados y viceversa.*

Demostración. Sea $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ un cubrimiento real de (M,σ). Sea $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un cubrimiento universal de M, y $f : \widetilde{M} \longrightarrow N$ un cubrimiento universal de N tal que $p = q \circ f$, tomando un punto $y \in N$ tal que $q(y) = x$ definimos

$$G := \pi_1^{\mathbb{R}}((N,\tau);y) = \{g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \mid f \circ g = \alpha \circ f,\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_N,\, \tau\}\}$$

que por el lema 3.6 contiene por lo menos un elemento no holomorfo, haciendo el homomorfismo $G \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobreyectivo con núcleo $G_0 := G \cap \pi_1(M;x)$.
Si $q' : (N',\tau') \longrightarrow (M,\sigma)$ es un cubrimiento real isomorfo a q, entonces existe $h : (N,\tau) \longrightarrow (N',\tau')$ isomorfismo de curvas algebraicas reales y $f' : M_x \longrightarrow N'$ cubrimiento tal que para $y' = h(y)$ se tenga que $f' = h \circ f$ y

$$\begin{aligned}
\pi_1^{\mathbb{R}}((N',\tau');y') &= \{g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \mid f' \circ g = \alpha \circ f',\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_N,\, \tau'\}\} \\
&= \{g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \mid h \circ f \circ g = \alpha \circ h \circ f,\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_N,\, \tau'\}\} \\
&= \{g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \mid f \circ g = h^{-1} \circ \alpha \circ h \circ f,\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_N,\, \tau'\}\} \\
&= \{g : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \mid f \circ g = \alpha \circ f,\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_N,\, \tau\}\} \\
&= \pi_1^{\mathbb{R}}((N,\tau);y).
\end{aligned}$$

Ahora, sea $G \subset \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ un subgrupo real y $\tau \in G$ un elemento no holomorfo. Entonces si tomamos $G_0 := G \cap \pi_1(M;x) \subset \pi_1(M;x)$, tenemos que $\widetilde{M}/G_0$ tiene estructura de superficie de Riemann. Definimos $\tau' : \widetilde{M}/G_0 \longrightarrow \widetilde{M}/G_0 : [y] \longmapsto [\tau(y)]$, el cual es una transformación anti-holomofa de $\widetilde{M}/G_0$. Como τ^2 es un elemento holomorfo de G, entonces $\tau'^2([y]) = [\tau^2(y)] = [y]$, y por lo tanto $(\widetilde{M}/G_0, \tau')$ es una curva algebraica real. p induce un cubrimiento $\widetilde{p} : \widetilde{M}/G_0 \longrightarrow M : [y] \longmapsto p(y)$ tal que $p \circ \tau'([y]) = p([\tau(y)]) = p \circ \tau(y) = \sigma \circ p(y)$ pues $\tau \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ es no holomorfo.

Si existe $g \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M})$ tal que $G = gHg^{-1}$ para algún subgrupo H, entonces $G_0 = gH_0g^{-1}$ y además g induce un automorfismo entre $(\widetilde{M}/H_0, g^{-1}\circ\tau'\circ g)$ y $(\widetilde{M}/G_0, \tau')$ que conmuta con el cubrimiento p. $\square$

Dado un cubrimiento real $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$, podemos considerar el grupo de automorfismo reales de q definido por $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(q) := \{f : N \longrightarrow N \mid q\circ f = \alpha\circ q,\ \alpha \in \{\mathrm{Id}_M,\ \sigma\}\}$.

Definición 3.19. Decimos que q es de *de Galois* si para todo $x \in M$ y cualesquiera puntos $\widetilde{x}$ y $\widetilde{\sigma(x)}$ en las fibras $q^{-1}(\{x\})$ y $q^{-1}(\{\sigma(x)\})$ existe $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(q)$ tal que $f(\widetilde{x}) = \widetilde{\sigma(x)}$. Si $p : (\widetilde{M_x}, \widetilde{\sigma}) \longrightarrow (M,\sigma)$ es un cubrimiento universal real, tenemos que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(p) = \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ y por el lema 3.6, p es de Galois.

Observación 3.20. *Si $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ es de Galois, tenemos que al olvidar la estructura real $q : N \longrightarrow M$ es un cubrimiento analítico de Galois, por ende para cualquier $y \in N$ con $q(y) = x$ el subgrupo $\pi_1(N;y) \subset \pi_1(M;x)$ es normal. Tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(N;y) \arrow[r, "\text{normal}"] \arrow[d, "\imath_0", "\text{normal}"'] & \pi_1^{\mathbb{R}}((N,\tau);y) \arrow[r] \arrow[d, "\imath"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(M;x) \arrow[r] & \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Como $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x) = \pi_1(M;x)\cdot\pi_1(N;y)$ y los subgrupos normales forman un retículo, entonces $\pi_1(N;y)$ es un subgrupo normal de $\pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$.

Teorema 3.21. *Un cubrimiento real $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ es de Galois si y sólo si el cubrimiento holomorfo $q : N \longrightarrow M$ es de Galois. Y en este caso*

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(q) = \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)/\pi_1(N;y).$$

Demostración. Sea $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ un cubrimiento real de Galois. Dados dos puntos $y,\ y' \in p^{-1}(\{x\})$, tenemos que $z = \tau(y') \in p^{-1}(\{\sigma(x)\})$, luego existe $g \in \pi_1^{\mathbb{R}}((M,\sigma);x)$ tal que $g(y) = z$, luego $\tau\circ g \in \pi_1(M;x)$ y $\tau\circ g(y) = \tau(z) = \tau(\tau(y')) = y'$. Luego $q : N \longrightarrow M$ es un cubrimiento analítico de Galois.

Recíprocamente sea $q : (N,\tau) \longrightarrow (M,\sigma)$ un cubrimiento real tal que $q : N \longrightarrow M$ es un cubrimiento holomorfo de Galois. Consideremos dos puntos $\widetilde{x}$ y $\widetilde{\sigma(x)}$ en las fibras $q^{-1}(\{x\})$ y $q^{-1}(\{\sigma(x)\})$, entonces $z = \tau(\widetilde{\sigma(x)}) \in q^{-1}(\{x\})$. Como $q : N \longrightarrow M$ es de Galois, existe $g : N \longrightarrow N$ tal que $q\circ g = q$ y $g(\widetilde{x}) = z$. Luego $\tau\circ g(\widetilde{x}) = \tau(z) = \tau(\tau(\widetilde{\sigma(x)})) = \widetilde{\sigma(x)}$ y $\tau\circ g \in \pi_1((N,\tau);y)$. Luego q es un cubrimiento real de Galois.

$\square$

3.3. No existencia del cubrimiento universal real.

Consideremos un ejemplo. Sea $M = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z})$ con $\sigma([z]) = [i\bar{z}]$ y $x = [\frac{1}{4} + \frac{3i}{4}]$. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [\frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + \frac{t}{2} - \frac{ti}{2}]$ entonces la transformación anti-holomorfa asociada es $\widetilde{\sigma} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto i\bar{z}$ y $\widetilde{\sigma}^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [\frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + \frac{3t}{2} - \frac{ti}{2}]$ entonces $\widetilde{\sigma} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto i\bar{z} + 1$ y $\widetilde{\sigma}^2(z) = z + 1 + i$. De hecho, cualquier camino

γ de x a $\sigma(x)$ es homotópicamente equivalente a algún

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [\frac{1}{4} + \frac{3i}{4} + \frac{t}{2} - \frac{ti}{2} + nt + mti]$$

donde n ,m son enteros. La transformación anti-holomorfa asociada a γ es $\widetilde{\sigma} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto i\bar{z}+n+mi$, de donde $\widetilde{\sigma}^2(z) = z+(n+m)+(n+m)i$, luego $\widetilde{\sigma}$ es una estructura real sólo si $n+m=0$. Así, el cociente $M/ < \widetilde{\sigma}^2 >$ es isomorfo o a un cilindro o es igual a $\mathbb{C}$. Sin embargo, el cubrimiento universal real de (M,σ) es isomorfo a $(\mathbb{C}, \widetilde{\sigma})$ con $\widetilde{\sigma}(z) = i\bar{z} + n - ni$ con n cualquier entero. En este caso, el cubrimiento universal de M tiene una familia de estructuras reales que cubren σ, y todas son compatibles, en el sentido que $(\mathbb{C}, z \longmapsto i\bar{z})$ es el cubrimiento universal real. Esto no siempre va a ocurrir, puede no existir una estructura real sobre el cubrimiento universal que cubra σ y esto puede conllevar a que no exista el cubrimiento universal real. El siguiente ejemplo será una muestra de esto.

Daremos un ejemplo en donde el espacio recubridor universal de M no tiene una estructura real que cubra σ, y daremos ejemplos de dos cubrimientos reales (N,σ_1) y (N,σ_2) de tal manera que ninguno sea cubrimiento real del otro, y que no exista un cubrimiento real de ambos.

Sea $M = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ con $\sigma([z]) = [\bar{z} + \frac{1}{2}]$ y $x = [0]$. Para $\gamma : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [t\frac{1}{2}+nt+mti]$ con n, m enteros, $\widetilde{\sigma} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \bar{z}+\frac{1}{2}+n+mi$ y $\widetilde{\sigma}^2(z) = z+1+2n$ es siempre distinto a la identidad. Así $\mathbb{C}$, el cubrimiento universal de M, no tiene una estructura real compatible con σ.

Sea $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [\frac{t}{2}]$ y $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow M : t \longmapsto [\frac{t}{2} + ti]$. Las aplicaciones correspondientes $\widetilde{\sigma_1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \bar{z} + \frac{1}{2}$ y $\widetilde{\sigma_2} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto \bar{z} + \frac{1}{2} + i$ son diferentes, sin embargo $\widetilde{\sigma_1}^2 = \widetilde{\sigma_2}^2 : z \longmapsto z+1$ son la misma. Sea N el cociente $M/ < \widetilde{\sigma_1}^2 >= M/ < \widetilde{\sigma_2}^2 >$. Sea σ_j la aplicación en N inducida por $\widetilde{\sigma_j}$, $j = 1, 2$, y $q : N \longrightarrow M$ el cubrimiento asociado a $< \widetilde{\sigma_j}^2 >$. Supongamos que $q : (N,\sigma_2) \longrightarrow (M,\sigma)$ es un subcubrimiento real de $q : (N,\sigma_1) \longrightarrow (M,\sigma)$. Entonces existe $f : (N,\sigma_1) \longrightarrow (N,\sigma_2)$ haciendo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rrr, "\sigma_1"] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[ddr, "q"'] & & & N \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[ddl, "q"] \\
& N \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[d, "q"'] & \\
& M \arrow[r, "\sigma"] & M &
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Luego f puede ser levantado a un automorfismo $\tilde{f}$ de $\mathbb{C}$. Si $\tilde{f}(z) = az + b$ con $a \neq 0$, entonces

$$\tilde{f}(z+1) - \tilde{f}(z) = a \in \mathbb{Z}$$

$$(f \circ \sigma_1 - \sigma_2 \circ f)([z]) = [a\bar{z} + \frac{a}{2} + b - a\bar{z} - \bar{b} - \frac{1}{2} - i] = [\frac{a-1}{2} + 2i\mathrm{Im}(b) - i]$$

esta última expresión es nula sólo si $\mathrm{Im}\,(b) = \frac{1}{2}$, pero en este caso $\mathrm{Im}\,(\tilde{f}(0) - 0) = \mathrm{Im}\,(b) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, así que $q \circ f \neq q$.

Supongamos es de la otra manera, es decir, supongamos que $q : (N, \sigma_1) \longrightarrow (M, \sigma)$ es un subcubrimiento real de $q : (N, \sigma_2) \longrightarrow (M, \sigma)$. Entonces existe $f : (N, \sigma_2) \longrightarrow (N, \sigma_1)$ haciendo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rrr, "\sigma_2"] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[ddr, "q"'] & & & N \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[ddl, "q"] \\
& N \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[d, "q"'] & \\
& M \arrow[r, "\sigma"] & M &
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Si $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto az + b$ con $a \neq 0$, entonces

$$\tilde{f}(z+1) - \tilde{f}(z) = a \in \mathbb{Z}$$
$$(f \circ \sigma_2 - \sigma_1 \circ f)([z]) = [a\bar{z} + \frac{a}{2} + ai + b - a\bar{z} - \bar{b} - \frac{1}{2}] = [\frac{a-1}{2} + 2i\mathrm{Im}(b) + ai]$$

es nula sólo si a es impar e $\mathrm{Im}\,(b) = -\frac{a}{2}$, pero en este caso $\mathrm{Im}\,(\tilde{f}(0) - 0) = \mathrm{Im}\,(b) = -\frac{a}{2} \notin \mathbb{Z}$ (puesto que a es impar), así que $q \circ f \neq q$.

Ahora, si existe (N', τ) tal que (N, σ_1) y (N, σ_2) son subcubrimientos reales, en particular N' es un espacio recubridor para N, pero no puede ser isomorfo a N; luego $N' \cong \mathbb{C}$, pero $\mathbb{C}$ no tiene estructuras reales que induzcan σ. Por lo tanto (M, σ) no tiene cubrimiento universal real.

Referencias

[Ati66] M. F. Atiyah. K-theory and reality. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 17(1):367–386, 1966.

[FK92] H.M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[For81] O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1981.

[Hit92] N. J. Hitchin. Lie groups and Teichmüller space. *Topology*, 31(3):449–473, 1992.

[Hui01] J. Huisman. The equivariant fundamental group, uniformization of real algebraic curves, and global complex analytic coordinates on teichmüller spaces. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math*, 2001.

[Nie27] J. Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.*, 50:189–358, 1927.