# Reconstrucción Demostración Teorema de no Encaje Afín de Gromov en $\mathbb{R}^{2n}$


**Alirio Calderón Díaz**

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad Ciencias y Educación, Matemáticas
Bogota, Colombia

2016

# Reconstrucción Demostración Teorema de no Encaje Afín de Gromov en $\mathbb{R}^{2n}$

**Alirio Calderón Díaz**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
**Matemático**

Director:
M.Cs. Matemáticas Carlos Antonio Julio Arrieta

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad Ciencias y Educación, Matemáticas
Bogota, Colombia
2016

## Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi madre Abra Lilia Diaz Diaz y a mi padre Jose Ermid Calderón Figueroa

# Agradecimientos

Agradezco inmensamente al profesor Florent Schaffhauser de la universidad de los andes por estar siempre pendiente de mi trabajo, atenderme siempre cuando lo necesite y hacerme las respectivas correcciones para mejorar academicamente, muchas veces que me sentía perdido en el trabajo de grado, el siempre me ayudaba a encontrar el rumbo de las ideas. Es una persona que me enseño muchas cosas a nivel académico, quedo altamente agradecido y es un placer haber compartido con usted profesor Florent.

Agradezco al profesor Carlos Julio Antonio Arrieta por estar conmigo en la realización de este trabajo y realizarme las respectivas correcciones, al profesor Carlos Orlando Ochoa por realizarme sugerencias para mejorar mi trabajo, a los profesores de la carrera de matemáticas de la universidad Distrital Francisco Jose de Caldas, amigos y familiares.

Gracias universidad Distrital Francisco Jose de Caldas, por darme la oportunidad de ser parte de ti y crecer a nivel personal y academico, siempre llevare tu nombre y al del proyecto curricular de matemáticas en alto a donde vaya.

# Índice general

# 1 Introducción

Al transcurrir el tiempo la matemética nos enamora con sus novedosas formas que interactúan entre si para entender el universo al cual pertenecemos. De tales formas novedosas aparece en el siglo XX la geometría simpléctica, el término simplécito fue utilizado por primera vez en 1939 por el matemático (Hermann Weyl). Tal geometría actualmente es activamente investigada por grandes mentes. Una de tales mentes es el matemático ruso Mikhail Gromov ganador del premio Abel en 2009. Gromov es autor del teorema de no encaje, el cual tiene varias versiones, en este trabajo de grado se tomara la versión afín del teorema de no encaje de Gromov, el cual se estudiara en el texto generado por Dusa Mcduff y Dietmar Salamon el cual es nuestra fuente principal bibliografica [1].

El objetivo principal de este trabajo es reconstruir la demostración del teorema de no encaje afín de gromov, el cual enuncia que:

*Sea $\psi \in ASp(2n)$ el simplectomorfismo afín definido por $\psi(z) = z_0 + Az$ para todo $z \in \mathbb{R}^{2n}$ y $z_0\mathbb{R}^{2n}$, donde $A \in Sp(2n)$. Supongamos $\psi(B^{2n}(r)) \subset z_0 + Z^{2n}(R)$. Entonces $r \leq R$.*

El los preliminares se enuncian algunos conceptos de álgebra lineal y al final de los preliminares esta un teorema que expone que todo espacio vectorial simpléctico $(V, \omega)$ es isomorfo al espacio vectorial simpléctico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

En el tercer capitulo se define espacio vectorial simpléctico y algunos subespacios para revisar la definición de espacio vectorial isotrópico, co-isotrópico y lagrangiano, en el capitulo 4 se define y se dan ciertas propiedades de matrices simplécticas y al final se llega a la reconstrucción de la demostración del teorema principal.

# 2 Preliminares

## 2.1. Algunos conceptos de álgebra lineal

Este trabajo tiene como una de sus herramientas el álgebra lineal, por tal motivo introducimos algunos conceptos relevantes relativos a estos temas y serán tomados de [4] y [5].

Recordando que una una matriz de tamaño $m \times n$ con entradas reales $A \in M_{m\times n}\mathbb{R}$ representa una transformación lineal definida como

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

**Definición.** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Nosotros definimos el espacio nulo (o kernel) N(T) de T al conjunto de todos los vectores $x \in V$ tal que $T(x) = 0$; esto es, $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$.
Definimos el rango (o imagen) R(T) de T al conjunto consistente de todas las imagenes (bajo T) de vectores en V; esto es, $R(T) = \{T(x) : x \in V\}$ [4, p. 67].

**Teorema.** Sea V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces N(T) y R(T) son subespacios de V y W, respectivamente. Revisar demostración en [4, p. 68].

**Definición.** Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si N(T) y R(T) son de dimension finita, entonces nosotros definimos la nulidad de T denotada como N(T) y el rango de T, denotada como rank(T) a las dimensiones de N(T) y R(T) respectivamente [4, p. 69].

**Teorema.** Sea V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal, si V tiene dimension finita, entonces nulidad(T)+rank(T)=dim(V),revisar demostración en [4, p. 70].

**Definición.** Sea S un subconjunto no vació de un espacio vectorial V. El espacio generado por S, denotado por **gen(S)**, es el conjunto consistente de todas las combinaciones lineales de los vectores en S. Por conveniencia, nosotros definimos **gen(**$\emptyset$**)** $= \{0\}$ [4, p. 30].

**Teorema.** El **gen** de un subconjunto S de un espacio vectorial V es un subespacio de V. Además, un subespacio de V que contiene S debe también contener el span de S, revisar demostración en [4, p. 30].

**Teorema.** Sea W subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces W es de dimensión finita y $\dim W \leq \dim V$. Además, si $\dim W = \dim V$, entonces V=W, revisar demostración en [4, p. 50].

**Definición.** Un subconjunto S de vectores de un espacio vectorial V es llamado linealmente dependiente si existe un numero finito de vectores distintos $u_1, \ldots, u_n$ en S y escalares $a_1, \ldots, a_n$ no todos ceros, tal que

$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots, a_nu_n = 0$

en este caso que el conjunto S es linealmente dependiente y el conjunto de vectores de S linealmente dependiente [4, p. 36].

**Definición.** Un subconjunto S de un espacio vectorial que no es linealmente dependiente es llamado linealmente independiente, decimos lo mismo de los vectores en S son linealmente independientes [4, p. 37].

Recordando que un operador es una transformación lineal de un espacio vectorial sobre si mismo, notaremos al conjunto de todos los operadores en $V$ por $\mathcal{L}(V)$, en otros trabajos $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ [5, p. 76]

**Definición.** Un operador S $\in \mathcal{L}(V)$ es llamado una isometría si

$$\|Sv\| = \|v\|$$

para todo $v \in V$ [5, p. 147].

## 2.2. Formas bilineales anti simétricas

**Definición.** Sea X un espacio vectorial. Un producto interno en X es una función de $X \times X$ sobre el campo escalar de X; esto es, cada par de vectores $x, y \in X$ está asociado con un escalar escrito como $\langle x, y \rangle$ y es llamado producto interior de $x$ e $y$, tal que para todo $x, y, z \in X$ y escalar $\alpha$, se cumple:

$(IP1)$ $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
$(IP2)$ $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
$(IP3)$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

$(IP4)$ $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tal definición fue tomada de [3, p. 129].

**Ejemplo 1.** Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ y la función $g_0$ definida en $\mathbb{R}^n$ como

$$g_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $g_0$ define un producto interior en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$. En efecto,

$IP1)$
$$\begin{aligned} g_0(x + y, z) &= \sum_{i}^{n} (x_i + y_i) z_i \\ &= \sum_{i}^{n} x_i z_i + \sum_{i}^{n} y_i z_i \\ &= g_0(x, z) + g_0(y, z) \end{aligned}$$

$IP2)$
$$\begin{aligned} g_0(\alpha x, y) &= \sum_{i}^{n} \alpha x_i y_i \\ &= \alpha \sum_{i}^{n} x_i y_i \\ &= \alpha g_0(x, y) \end{aligned}$$

$IP3)$
$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= \sum_{i}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i}^{n} y_i x_i \\ &= g_0(y, x) \end{aligned}$$

$IP4)$
$$g_0(x, x) = \sum_{i}^{n} x_i^2$$

Si $g_0(x, x) = 0$, entonces $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 0$, por tanto $x_i^2 = 0$ para todo $i$, con lo cual $x_i = 0$, para cada $i$, así $x = 0$.

Si $x = 0$, entonces $g_0(x, x) = 0$.

Por tanto la función $g_0$ define un producto interno en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$.

**Definición.** Sea $V$ un espacio vectorial real y $B : V \times V \to \mathbb{R}$ una función. $B$ es una forma bilineal en $V$ si, para cada $v \in V$

$$w \mapsto B(v,w) : V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad w \mapsto B(w,v) : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

son ambas transformaciones lineales. B es anti simétrica o alternada si para todo $v, w \in V$, se cumple que $B(v,w) = -B(w,v)$ [2, p. 32].

**Ejemplo 2. (Forma bilineal)**
Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ y la función $g_0$ definida en $\mathbb{R}^n$ como en el ejemplo 1. $g_0(x, y+z) = g_0(x,y) + g_0(x,z)$ se sigue de IP1 y IP2 utilizando IP3, así la función $g_0$ es una forma bilineal en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.
**Teorema.** Sea V un espacio con producto interno sobre F, entonces para todo $x, y \in V$ y $c \in F$, las siguientes afirmaciones son ciertas.
(a) $\|cx\| = |c|\|x\|$
(b) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$. En cualquier caso, $\|x\| \geq 0$
(c) (Desigualdad Cauchy - Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
(d) (Desigualdad triangular) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Revisar demostración en [4, p. 334].

## 2.3. Matrices particionadas en bloques

Algunas veces escribir una matriz en forma de bloques ayuda a resolver ciertos problemas, por tal motivo para entender como se multiplican matrices cuando estan particionadas en forma de bloques, recurrimos al siguiente ejemplo.
Sean las matrices A y B definidas como

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Realizando particiones, como sigue

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 5 \\ \hline 5 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad y \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c} -7 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Por tanto reescribiendo ahora la matriz por bloques tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \;,\; A_{12} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \;,\; A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \;,\; A_{22} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \;,\; B_{11} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; B_{13} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \;,\; B_{21} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \;,\; B_{22} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \;,\; B_{23} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}.$$

Realizando producto $A \times B$ tenemos:
$A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} = -39$ , $A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} = 15$ , $A_{11} \cdot B_{13} + A_{12} \cdot B_{33} = -29$ , $A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{12} = -24$ , $A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} = -6$ , $A_{21} \cdot B_{13} + A_{22} \cdot B_{23} = 25$.
Por tanto obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 15 & -29 \\ -24 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

## 2.4. 2-forma diferencial y producto exterior en $\mathbb{R}^n$

Sea $p \in \mathbb{R}^3$. El conjunto de vectores $q - p$, $q \in \mathbb{R}^3$ que tiene origen en $p$, se llama espacio tangente de $\mathbb{R}^3$ en $p$ y se denota como $\mathbb{R}^3_p$. Los vectores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3_0$, entonces la base para $\mathbb{R}^3_p$ sera $(e_1)_p$, $(e_2)_p$ y $(e_3)_p$. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función $v$ que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ un vector $v(p) \in \mathbb{R}^3_p$, nosotros podemos escribir $v(p)$ como $v(p) = a_1(p)e_1 + a_2(p)e_2 + a_3(p)e_3$, de este modo las tres funciones $a_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ caracterizan el campo vectorial. el campo vectorial $v$ es diferencial si cada una de las funciones $a_i$ son diferenciales.
A cada espacio tangente $\mathbb{R}^3_p$ nosotros asociamos su espacio dual $(\mathbb{R}^3_p)^*$ como el conjunto de todas transformaciones lineales $\psi : \mathbb{R}^3_p \longrightarrow \mathbb{R}$. Una base para $(\mathbb{R}^3_p)^*$ es obtenida por $(dx_i)_p$, $i = 1,2,3$, donde $x_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación que asigna a cada punto su i-esima coordenada. El conjunto $\{(dx_i)_p; i = 1,2,3\}$ es en efecto la base dual de $\{(e_i)_p\}$ donde

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & si \quad i \neq j \\ 1, & si \quad i = j \end{cases}$$

**Definición.** Un campo de formas lineales (o forma exterior de grado 1) en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\omega$ que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento de $(\mathbb{R}^3)^*$; $\omega$ puede ser escrita como

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

$$\omega = \sum_{1}^{3} a_i dx_i,$$

donde $a_i$ son funciones reales en $\mathbb{R}^3$. Si las funciones $a_i$ son diferenciales, $\omega$ es llamada forma diferencial de grado 1 [6, p. 2].

Ahora nosotros notaremos $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ como el conjunto de aplicaciones $\psi : \mathbb{R}^3_p \times \mathbb{R}^3_p \longrightarrow \mathbb{R}$ que son bilineales y alternadas, es decir $\psi(v_1, v_2) = -\psi(v_2, v_1)$, con las operaciones usuales de funciones, el conjunto $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ forma un espacio vectorial.

Para $\psi_1, \psi_2 \in (\mathbb{R}^3_p)^*$, nosotros podemos obtener un elemento $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ donde

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \psi_1(v_1) & \psi_1(v_2) \\ \psi_2(v_1) & \psi_2(v_2) \end{pmatrix}$$

Para los elementos $(dx_i)_p, (dx_j)_p \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3_p)^*$, lo notaremos como $(dx_i, dx_j)_p$.

**Definición.** Un campo de formas bilineales alternadas o forma exterior de grado 2 en $\mathbb{R}^3$ es una correspondencia $\omega$ que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3_p)^*$; $\omega$ puede ser escrito de la forma [6, p. 2]

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

cuando las funciones reales $a_{12}, a_{13}, a_{23}$ en $\mathbb{R}^3$ son diferenciales, $\omega$ es una forma diferencial de grado 2.

Ahora pasemos a formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$ espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en $p$ y $(\mathbb{R}^n_p)^*$ su espacio dual. $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ es el conjunto de todas las k-lineales aplicaciones alternadas, este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones.

$$\psi : (\mathbb{R}^n_p)^* \times \ldots \times (\mathbb{R}^n_p)^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

**Lema.** Para un subespacio $W \subset V$ [1, p. 39]

$$\dim w + \dim w^{\omega} = \dim V, \qquad W^{\omega\omega} = W.$$

**Teorema.** Sea $(V, \omega)$ un espacio vectorial simpléctico de dimension 2n.
Entonces existe una base $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ tal que

$$\omega(u_i, u_j)) = \omega(v_i, v_j)) = 0, \qquad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}.$$

esta base es llamada base simpléctica. Es mas, aquí existe un espacio vectorial isomorfo $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V$ tal que $\Psi^*\omega \longrightarrow \omega_0$ [1, p. 39].

# 3 Espacio Vectorial Simpléctico

Los resultados expuestos en este capitulo se han tomado de [1], dado un espacio vectorial real $V$ y una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$, f se llama forma bilineal anti-simétrica si para todo $v, w \in V$ se cumple $f(v.w) = -f(w, v)$.
Además $f$ se llama forma bilineal no degenerada si para $v \in V$ y $f(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$ [1, p. 38].

**Ejemplo. Forma bilineal anti-simétrica**
Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$ con la forma bilineal definida como

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Si $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ y $w = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, entonces

$$\omega_0(z, w) = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j(z, w)$$

Para cada j tenemos

$$\begin{aligned} dx_j \wedge dy_j(z, w) &= \begin{vmatrix} dx_j(z) & dx_j(w) \\ dy_j(z) & dy_j(w) \end{vmatrix} \\ &= dx_j(z)dy_j(w) - dx_j(w)dy_j(z) \\ &= -(-dx_j(z)dy_j(w) + dx_j(w)dy_j(z)) \\ &= -dx_j \wedge dy_j(w, z) \end{aligned}$$

así $\omega_0(z, w) = -\omega_0(w, z)$, con lo cual $\omega_0$ es una forma bilineal anti-simétrica.

**Ejemplo. Forma bilineal no degenerada**
definamos $e_i = (0_1, 0_2, \ldots, 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1}, \ldots, 0_n, \ldots, 0_{2n})$ y
$e_j = (0_1, 0_2, \ldots, 0_{n-1}, 0_n, 0_{n+1}, \ldots, 0_{j-1}, 1_j, 0_{j+1}, \ldots, 0_{2n})$ y supongamos para $z = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ en $\mathbb{R}^{2n}$ y para todo $w \in \mathbb{R}^2$ se cumple $\omega_0(z) = 0$, entonces tenemos en particular que para

todo i,j, $\omega_0(z, e_i) = 0$ y $\omega_0(z, e'_{ij}) = 0$, por lo cual para cada i,j tenemos $x_i = y_j = 0$, así $z = 0$, luego $\omega_0$ es una forma bilineal no degenerada.

**Definición.** Dado un espacio vectorial real de dimension finita V y una forma bilineal anti simétrica no degenerada $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$, el par $(V, \omega)$ se llama espacio vectorial simpléctico [1, p. 38].

**Ejemplo. Espacio vectorial simpléctico**
Por lo realizado en el ejemplo 3 y 4, concluimos que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ es un espacio vectorial simpléctico.

**Teorema.** Si $(V, \omega)$ espacio vectorial simpléctico entonces $\dim V$ es par.

**Demostración**

Sea $(v_1, \ldots, v_k)$ una base para $V$, entonces la matriz asociada a la forma bilineal $\omega$ es

$$A=\begin{pmatrix} \omega(v_1, v_1) & \cdots & \omega(v_1, v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(v_k, v_1) & \cdots & \omega(v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

Por ser $\omega$ anti simétrica tenemos

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \omega(v_1, v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega(v_1, v_k) & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A$ es cuadrada y anti simétrica se cumple que

$$\begin{aligned} det(A) &= det(A^t) \\ &= det(-A) \\ &= (-1)^k det(A) \end{aligned}$$

Si k es impar entonces $det(A) = 0$, luego existe $v \in V$ distinto de cero tal que $Av = 0$. Dado que

$$\begin{aligned} \omega(w, v) &= w^t A v \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $w \in V$ y $v \neq 0$, entonces $\omega$ es forma bilineal degenerada, lo cual es una contradicción, así k es par.

**Definición.** Sea $(V, \omega)$ un espacio vectorial simpléctico y sea $W \subset V$ un subespacio vectorial. Se define el complemento simpléctico de $W$ como el subespacio

$$W^{\omega} = \{v \in V | w(v, w) = 0, \qquad \forall w \in W\}$$

El subespacio $W$ se llama isotrópico si $W \subset W^{\omega}$ o coisotrópico si $W^{\omega} \subset W$ o simpléctico si $W \cap W^{\omega} = \{0\}$ o lagrangiano si $W = W^{\omega}$ [1, p. 38].

**Ejemplo. Subespacio isotrópico**
Sea el espacio vectorial simpléctico $(\mathbb{R}^4, \omega_1)$, donde $\omega_1 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ y el subespacio $W$ definido como $W = \{(x, 0, x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$, luego para $v \in \mathbb{R}^4$ y $w \in W$ tal que $w = (x, 0, x, 0)$ y $v = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ donde $x, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\omega_1(v, w) &= dx_1 \wedge dy_1(v, w) + dx_2 \wedge dy_2(v, w) \\
&= \det \begin{pmatrix} dx_1(v) & dx_1(w) \\ dy_1(v) & dy_1(w) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} dx_2(v) & dx_2(w) \\ dy_2(v) & dy_2(w) \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= x(x_1 - y_1)
\end{aligned}$$

cuando $x_1 = y_1$ tenemos $\omega_1(v, w) = 0$ para todo $w \in W$, entonces
$W^{\omega_1} = \{(x_1, x_2, x_1, y_2) : x_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$, así $W \subset W^{\omega_1}$.

Se denotara por $\mathcal{L}(V, \omega)$ el conjunto de los subespacios lagrangianos de $(V, \omega)$ y abreviadamente $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

**Lema.** Sean X e Y matrices reales $n \times n$ y definamos $\bigwedge \subset \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\bigwedge = \textit{Rango } \mathrm{Z}, \qquad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Entonces $\bigwedge \in \mathcal{L}(n)$ si y soló si la matriz Z tiene rango n y

$$X^T Y = Y^T X$$

En particular, la gráfica de $\bigwedge = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es lagrangiano si y solo si A es simétrica [1, p. 50].

**Demostración**
$\Leftarrow$) Supongamos rango(Z)=n y $X^T Y - Y^T X$, entonces la dimension del subespacio vectorial $\bigwedge$ es n y dado su complemento simpléctico $\bigwedge^{\omega}$ aplicando el lema, tenemos que

$\dim \bigwedge + \dim \bigwedge^{\omega} = \dim \mathbb{R}^{2n}$, por tanto $\dim \bigwedge = \dim \bigwedge^{\omega}$.

para $\lambda, \eta \in \bigwedge$ arbitrarios, existen $v, w \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}\omega_0(\lambda, \eta) &= v^T(X^TY - Y^TX)w \\ &= 0\end{aligned}$$

por tanto $\bigwedge \subset \bigwedge^{\omega}$, entonces $\bigwedge = \bigwedge^{\omega}$, con lo cual $\bigwedge$ es subespacio lagrangiano.

$\Rightarrow$) Supongamos imagen de $Z$ lagrangiana por tanto imagen de $Z$ es isotropica, es decir $\bigwedge \subset \bigwedge^{\omega}$. Para cualesquiera $\lambda, \eta \in \bigwedge$ existen $v, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda = Zv$ y $\eta = Zw$, luego

$$\begin{aligned}\omega(\lambda, \eta) &= \left( \begin{pmatrix} Xv \\ Yv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Xw \\ Yw \end{pmatrix} \right) \\ &= (Xv)^TYw - (Yv)^tXw \\ &= v^TX^TYw - v^TY^TXw \\ &= v^T(X^TY - Y^TX)w \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto $X^TY = Y^TX$. Como los subespacios son iguales $\bigwedge = \bigwedge^{\omega}$, entonces sus dimensiones son iguales y por lema, la dimension de cada uno es n, con lo cual rango(Z)=n.

Para el caso particular donde $X = \mathbb{I}_{n\times n}$ y $Y = A_{n\times n}$ tal que A es una matriz simétrica, supongamos $\bigwedge$ lagrangiano, entonces $\bigwedge \subset \bigwedge^{\omega_0}$, sean $\lambda, \eta \in \bigwedge$ arbitrarios, entonces existen $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ donde $\lambda = Zv$ y $\eta = Zw$, donde se obtiene $\omega_0(\lambda, \eta) = 0$ para todo $\lambda, \eta \in \mathbb{R}^{2n}$, con lo cual

$$\begin{aligned}\omega_0(\lambda, \eta) &= w^TAv - (Aw)^Tv \\ &= w^TAv - (Aw)^Tv \\ &= w^T(A - A^T)v\end{aligned}$$

como $\lambda, \eta$ fueron escogidos arbitrariamente y $w^T(A - A^T)v = 0$, luego$A = A^T$, por tanto $A$ es una matriz simétrica.

Supongamos que A es una matriz simétrica, escogiendo arbitrariamente $\lambda, \eta \in \bigwedge$ tenemos que $\omega_0(\lambda, \eta) = w^T(A - A^T)v$, por tanto $\bigwedge \subset \bigwedge^{\omega_0}$. Nosotros tenemos que la matriz Z esta representada como

$$Z = \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ A \end{pmatrix}$$

por tanto sea $u_i$ la i-esima columna de la matriz Z. Sea la combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$, entonces teniendo solo en cuenta las primeras n filas de la matriz Z, entonces llegamos a la conclusión que $a_i = 0$ para cada i, por tanto las n columnas de A son linealmente independiente, así rango Z = n, por tanto dim $\bigwedge = n$ y por lema dim $\bigwedge^{\omega_0} = n$, con lo cual tenemos $\bigwedge$ subespacio vectorial de $\bigwedge^{\omega_0}$ y dim $\bigwedge =$ dim $\bigwedge^{\omega_0}$, entonces por teorema $\bigwedge = \bigwedge^{\omega_0}$, así $\bigwedge$ es lagrangiano.

**Ejemplo.** Consideremos $X = \mathbb{I}_{2\times 2}$ y $Y = \mathbb{I}_{2\times 2}$, $Z$ es una transformación lineal tal que $Z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, escogamos arbitrariamente $v \in \mathbb{R}^2$, entonces $\bigwedge = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, por tal motivo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es lagrangiano por ser imagen de $Z$ así definido.

# 4 Matrices simplécticas y teorema de no encaje afín de Gromov

En la reconstrucción del teorema de no encaje afín de Gromov, se utiliza elementos del conjunto $ASp(2n)$, que mas adelante se definirá.
Definamos primero que todo la matriz

$$J_0 \quad = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición.** Una matriz $\Psi$ se llama simpléctica si satisface

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0$$

Donde

$$J_0 \quad = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

$J_0$ es una matriz de tamaño $2n \times 2n$ donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden $n \times n$ y 0 la matriz nula de orden $n \times n$ [1, p. 17].

**Definición.** El conjunto de matrices reales $\Psi$ de tamaño $2n \times 2n$ que satisfacen $\Psi^T J_0 \Psi = J_0$ se notara con $Sp(2n)$, donde $Sp(2n) = Sp(2n, \mathbb{R}) = Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ [1, p. 43].

En la demostración de nuestro teorema principal se utiliza el hecho que $J_0$ es una isometría en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$, en efecto tenemos que para cualquier $v \in \mathbb{R}^{2n}$ donde $v = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, calculando $J_0 v = (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|J_0 v\| &= \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 + (-y_i)^2} \\ &= \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 + (y_i)^2} \\ &= \|v\| \end{aligned}$$

Luego $J_0$ es una isometría en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$. Observando $J_0$, tenemos que ella define una rotación de 90 grados a cualquier elemento del espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$. No sobra ver que $J_0^2 = -\mathbb{I}$, más aún $-J_0 = J_0^T$.

**Definición.** El conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ se llama grupo general lineal definido como

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n} : \det A \neq 0\}$$

en efecto es un grupo, si $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, luego $AB \in GL(n, \mathbb{R})$.
Si $A \in GL(n, \mathbb{R})$, entonces $A^{-1}$ existe y $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$, así $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$, por tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo.

Dada una matriz cuadrada A y $\det A \neq 0$ entonces la matriz inversa $A^{-1}$ existe, en el texto de Dusa McDuff tenemos un ejercicio donde podemos saber cuando una matriz con ciertas condiciones es simpléctica [1, p. 20].

**Lema.** Si $\Phi$ y $\Psi$ son matrices simplécticas entonces $\Phi\Psi$, $\Psi^{-1}$ y $\Psi^T$ también lo son [1, p. 20].
**Demostración.**
Si $\Psi \in Sp(2n)$ entonces $\Psi^{-1}$ existe
Sea $O(n) = \left\{A \in M_{n\times n} | AA^T = A^T A = I\right\}$, observemos que

$$\begin{aligned}\det(A)\det(A)^T &= \det \mathbb{I}\\ \det(A)^2 &= 1\end{aligned}$$

por tanto $\det A \pm 1$.

**Proposición.**(Grupo ortogonal) $O(n)$ es subgrupo de $GL(n)$, por tal razón $O(n)$ recibe el nombre de grupo ortogonal.

**Demostración**

**i.** Si $A \in O(n)$, entonces $A^{-1}$ existe

$$\begin{aligned}AB(AB)^T &= ABB^T A^T \\ &= \mathbb{I}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

por tanto $AB \in O(n)$.

**ii.** Si $A \in O(n)$, entonces $A^{-1}$ existe, por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} AA^T &= \mathbb{I} & A^T A &= \mathbb{I} \\ A^T &= A^{-1} & A &= (A^T)^{-1} \\ \mathbb{I} &= (A^{-1})^T A^{-1} & \mathbb{I} &= (A)^{-1}(A^{-1})^T \end{aligned}$$

Así $A^{-1} \in O(n)$ entonces $O(n)$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

La matriz $J \in Sp(2n)$ y dado $A \in Sp(2n)$ entonces

$$\begin{aligned} \det(A^T JA) &= \det J \\ \det(A)\det(A^T) &= 1 \\ \det(A) &= \pm 1 \end{aligned}$$

con lo cual $Sp(2n) \subset GL(2n)$.

**Teorema.** $Sp(2n)$ es subgrupo de $GL(2n)$.

**Demostración.**
**i.** Sea $\mathbb{I} \in M_{2n\times 2n}$ donde $\mathbb{I}^{\mathrm{T}} J\mathbb{I} = \mathbb{J}$ luego $\mathbb{I} \in Sp(2n)$.

**ii.** Sea $A, B \in Sp(2n)$.

$$\begin{aligned} (AB)^T JAB^T &= AB^{-1}J(B^{-1})^T A^T \\ &= AJA^T \\ &= J \end{aligned}$$

Así $AB \in Sp(2n)$.

**iii.** Si $A \in Sp(2n)$ existe $A^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} A^T JA &= J \\ A^T J &= JA^{-1} \\ J &= (A^{-1})^T JA^{-1} \end{aligned}$$

como tenemos $Sp(2n) \subset GL(2n)$, entonces $Sp(2n)$ subgrupo de $GL(2n)$.

**Ejercicio 1.** Considere la matriz

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Donde A,B,C y D son matrices reales de tamaño $n \times n$. Probar que $\Psi$ es simpléctica si y solo si su inversa es de la forma

$$\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

De forma más explicita esto significa que

$$A^T C = C^T A, \quad B^T D = D^T B, \quad A^T D - C^T B = \mathbb{I},$$

O equivalentemente

$$AB^T = BA^T, \quad CD^T = DC^T, \quad AD^T - BC^T = \mathbb{I},$$

**Demostración.**
$\Rightarrow$). Supongamos que $\Psi \in Sp(2n, \mathbb{R})$ luego $\Psi^{-1} \in Sp(2n, \mathbb{R})$. Tenemos la propiedad $A^T JA = J$ por tanto

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

Por hipótesis $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$, entonces $A^T \in Sp(2n, \mathbb{R})$, así tenemos que $AJA^T = J$, con lo cual

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^T & D^T \\ A^T & C^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

Donde obtenemos las siguientes igualdades.
$AB^T - BA^T = 0, \quad AD^T - BC^T = \mathbb{I}, \quad CB^T - DA^T = -\mathbb{I}, \quad CD^T - DC^T = 0.$

Mostremos que $\Psi^{-1}$ así definida es la inversa de $\Psi$, en efecto

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD^T - BC^T & -AB^T + BA^T \\ CD^T - DC^T & -CB^T + DA^T \end{pmatrix}$$

Tenemos que $AD^T - BC^T = \mathbb{I}, \quad AB^T - BA^T = 0, \quad CD^T - DC^T = 0$ y $\quad CB^T - DA^T = -\mathbb{I}$, donde multiplicando por -1 ambos lados de la ultima igualdad obtenemos que $DA^T - CB^T =$

$\mathbb{I}$, con lo cual $\Psi\Psi^{-1} = \mathbb{I}_{2n\times 2n}$.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^T - BC^T & -AB^T + BA^T \\ CD^T - DC^T & -CBT + DA^T \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que la matriz $\Psi^{-1}$ es la matriz inversa de $\Psi$ por lo tanto

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

obteniendose las igualdades $AD^T - BC^T = \mathbb{I}$, $-AB^T - BA^T = 0$, $CD^T - DC^T = 0$ y $-C^TB + DA^T = \mathbb{I}$.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$$

**Definición.** la bola cerrada euclidiana en $\mathbb{R}^{2n}$ con centro en cero y radio r, denotada con $B^{2n}(r)$, es

$$B^{2n}(r) = \left\{(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 \leq r^2\right\}.$$

**Definición.** El cilindro simpléctico se define como $Z^{2n}(R) = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ donde

$$Z^{2n}(R) = \left\{(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} | x_1^2 + y_1^2 \leq R^2\right\}.$$

el disco $B^2(r)$ esta contenido en el plano simpléctico $x_1y_1$, si el plano fuera isotropico o lagrangiano se llamara cilindro isotrópico o cilindro lagrangiano respectivamente [1, p. 31]

Vamos a necesitar el siguiente lema en la demostración del teorema principal.

**Lema.** $B^{2n}(r) = rB^{2n}(1)$ y $Z^{2n}\left(\dfrac{R}{r}\right) = \dfrac{1}{r}Z^{2n}(R).$

**Demostración.**

Empezamos mostrando la contenencia $rB^{2n}(1) \subset B^{2n}(r)$.

Sea la aplicación $\Lambda_r : B^{2n}(1) \longrightarrow rB^{2n}(1)$ que actúa como $\Lambda_r(z') := rz'$. Escogemos arbitrariamente $z \in rB^{2n}(1)$ por lo tanto existe $z' \in B^{2n}(1)$, donde $z = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ y $z' = (x_1', \cdots, x_n', y_1', \cdots, y_n')$, tal que $\Lambda_r z' = z$. Tenemos la igualdad de los puntos $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = (rx_1', \cdots, rx_n', ry_1', \cdots, ry_n')$, donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + y_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (rx_i)^2 + (ry_i)^2 \\
&= r^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 + (y_i')^2 \\
&\leq r^2
\end{aligned}$$

Por tanto $z \in B^{2n}(r)$, así $rB^{2n}(1) \subset B^{2n}(r)$.

Ahora pasemos a mostrar la contenencia $B^{2n}(r) \subset rB^{2n}(1)$.
Sea $v \in B^{2n}(r)$ y $w = \frac{1}{r}v$, donde $||w||^2 = \frac{1}{r^2}||v||^2$, por tanto $||w||^2 \leq 1$. Así

$$\begin{aligned}
\Lambda_r(w) &= r(w) \\
&= r(\frac{1}{r}v) \\
&= v
\end{aligned}$$

Luego $v \in rB^{2n}(1)$, lo que demuestra $B^{2n}(r) \subset rB^{2n}(1)$, por lo tanto $B^{2n}(r) = rB^{2n}(1)$.

Mostremos ahora la igualdad $Z^{2n}\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{1}{r}Z^{2n}(R)$, empecemos mostrando la contenencia $\frac{1}{r}Z^{2n}(R) \subset Z^{2n}\left(\frac{R}{r}\right)$.
Sea la aplicación $\Lambda_r : Z^{2n}(R) \longrightarrow \frac{1}{r}Z^{2n}(R)$, para $(X', Y') \in Z^{2n}(R)$ donde $(X', Y') = (x_1', \ldots, x_n', y_1', \ldots, y_n')$ tenemos que

$$\Lambda_r(X', Y') = \frac{1}{r}((X', Y'))$$

En particular

$$\left(\frac{1}{r^2}\right)((x_1')^2 + (y_1')^2) \leq \left(\frac{R^2}{r^2}\right)$$

luego $\frac{1}{r}Z^{2n}(R) \subset Z^{2n}\left(\frac{R}{r}\right)$.

Escogamos arbitrariamente $(X, Y)$ perteneciente a la imagen de $\Lambda_r$, entonces existe $(X', Y') \in Z^{2n}(R)$ tal que $\left(\frac{1}{r}\right)(X', Y') = (X, Y)$.

Por lo tanto $\left(\frac{1}{r}\right)(x_1', y_1') = (x_1, y_1)$, así $(x_1', y_1') = (rx_1, ry_1)$, dado que $(X', Y') \in Z^{2n}(R)$, entonces $r^2(x_1^2 + y_1^2) \leq R^2$, de $(x_1^2 + y_1^2) \leq \left(\frac{R^2}{r^2}\right)$ obtenemos $\frac{1}{r} Z^{2n}(R) \subset Z^{2n}\left(\frac{R}{r}\right)$.

**Definición.** Un simplectomorfismo afín de $\mathbb{R}^{2n}$ es una aplicación $\psi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de la forma

$$\psi(z) = \Psi(z) + z_0$$

donde $\Psi \in Sp(2n)$ y $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Nosotros denotamos por $ASp(2n)$ el grupo de los simplectomorfismos afines [1, p. 55].

**Teorema.** Sea $\psi \in ASp(2n)$ el simplectomorfismo afín definido por $\psi(z) = z_0 + Az$ para todo $z \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $A \in Sp(2n)$. Supongamos $\psi(B^{2n}(r)) \subset z_0 + Z^{2n}(R)$. Entonces $r \leq R$.

**Demostración**

Sea $\Psi \in ASp(2n, \mathbb{R})$ y por hipótesis $\Psi(B^{2n}(r)) \subset z_0 + Z^{2n}(R)$.

Elijamos $r > 0$ y dado que $B^{2n}(r) = rB^{2n}(1)$, luego

$$\begin{aligned}\psi(B^{2n}(r)) &= \psi(rB^{2n}(1)) \\ &= z_0 + A(rB^{2n}(1)) \\ &= z_0 + rA(B^{2n}(1))\end{aligned}$$

Por hipótesis $z_0 + rA(B^{2n}(1)) \subset z_0 + Z^{2n}(R)$, lo que implica $A(B^{2n}(1)) \subset \frac{1}{r} Z^{2n}(R)$, que equivale a $A(B^{2n}(1)) \subset Z^{2n}(\frac{R}{r})$. Realizando la sustitución $R' = \frac{R}{r}$, tenemos que $R^{'} \geq 1$ si y solo si $R \geq r$.

Hemos reducido el problema a mostrar que si existe $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ tal que $A(B^{2n}(1)) \subset Z^{2n}(R')$ entonces $R^{'} \geq 1$.
Ahora consideramos

$$A = \begin{pmatrix} \rule{2em}{0.4pt} & v_1 & \rule{2em}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2em}{0.4pt} & v_n & \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} & w_1 & \rule{2em}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2em}{0.4pt} & w_n & \rule{2em}{0.4pt} \end{pmatrix},$$

donde cada $v_i, w_i$ son las filas de A. La forma simpléctica estándar $\omega_0$ actúa sobre $\mathbb{R}^{2n}$ como

$$\omega_0(v_1^T, w_1^T) = v_1 J w_1^T$$

Así tenemos que $v_1 J w_1^T$ es igual al coeficiente $(1, n+1)$ de la matriz $AJA^T$, donde $A^T \in Sp(2n, \mathbb{R})$, por tanto $|v_1 J w_1^T| = 1$, Dada la relación

$$\begin{aligned} w_0(v_1^T, w_1^T) &= v_1 J w_1^T \\ &= g_0(v_1^T, J w_1^T) \end{aligned}$$

entonces por desigualdad de cauchy-schwarz $|v_1 J w_1^T| \leq \|v_1^T\| \|J w_1^T\|$, como $J$ es isometría y $\|w_1\| = \|w_1^T\|$, por tanto se obtiene $|v_1 J w_1^T| \leq \|v_1\| \|w_1\|$, así tenemos la desigualdad

$$1 \leq \|v_1\| \|w_1\|$$

Así se obtiene el resultado $\|v_1\| \geq 1$ y $\|w_1\| \geq 1$.

Para todo $z \in B^{2n}(1)$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} & v_1 & \rule{2cm}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2cm}{0.4pt} & v_n & \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} & w_1 & \rule{2cm}{0.4pt} \\ & \vdots & \\ \rule{2cm}{0.4pt} & w_n & \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, z \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, z \rangle \\ \langle w_1, z \rangle \\ \vdots \\ \langle w_n, z \rangle \end{pmatrix}$$

Tomemos $z = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} \in B^{2n}(1)$ y por hipótesis $\langle v_1, z \rangle^2 + \langle w_1, z \rangle^2 \leq R'^2$, por tanto

$$\begin{aligned} R'^2 &\geq \left( v_1 \cdot \frac{v_1^T}{\|v_1\|} \right)^2 + \left( w_1 \cdot \frac{v_1^T}{\|v_1\|} \right)^2 \\ &\geq \left( v_1 \cdot \frac{v_1^T}{\|v_1\|} \right)^2 \\ &\geq \left( \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|} \right)^2 \end{aligned}$$

Por tanto $R' \geq 1$, así $r \leq R$, así la prueba finaliza.

El siguiente ejemplo muestra como cambiando una hipótesis del teorema, no se cumple la tesis.

**Ejemplo.** Sea la matriz simpléctica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En efecto

$$\begin{aligned} A^T J_0 A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= J_0 \end{aligned}$$

Consideremos el cilindro isótropo

$$Z^4\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} | x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$$

Sea $v \in B^4(1)$ arbitrario donde $v = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, $Av = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, 2y_1, 2y_2\right)$, tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

entonces $A(B^4(1)) \subset Z^4\left(\frac{1}{2}\right)$, sin embargo $1 > \frac{1}{2}$, por tanto este ejemplo muestra como cambiando la hipótesis de cilindro simpléctico por cilindro isótropo, existe un simplectomorfismo afín tal que la bola cerrada es enviada en el cilindro isótropo y sin el embargo el radio de la bola cerrada es mayor al radio del cilindro isótropo.

**Ejemplo.** El siguiente ejemplo ilustra un caso cuando se cumple el teorema de no encaje afín de Gromov. Consideraremos el simplectomorfismo afín $\Psi$ y $z \in \mathbb{R}^2$ donde $z = (x_1, y_2)$ y $0 \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto $\Psi(z) = 0 + \mathbb{I}$ tal que $\mathbb{I} \in Sp(2)$ en efecto,

$\mathbb{I}^T J \mathbb{I} = J$

suponer que $\Psi(B^4(1)) \subset Z^4(R)$, implica que $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$, por tanto $1 \leq R$.

# 5 Conclusiones

• El teorema de no encaje afín de gromov nos dice que si existe un simplectomorfimo afín que aplicado a la bola cerrada euclidiana de radio $r$ quede contenida en el cilindro simpléctico de radio $R$, entonces $r \leq R$, este nos dice que un simplectomorfismo afín admite ciertos grados de libertad al transformar una figura preservando su volumen.

• Por el teorema expuesto en [1, p. 39], teniendo cualquier espacio vectorial simpléctico $(V, \omega)$, siempre podemos trabajar en el espacio vectorial simpléctico $\mathbb{R}^{2n}, \omega_0$, ver las propiedades algebraicas aquí y llevarlas a $(V, \omega)$.

• Cuando cambiamos la hipótesis de ser un cilindro simpléctico por un cilindro isotrópico el teorema no se cumple, esto no quiere decir que el teorema no se cumple ya que cambiamos una de una de sus hipótesis, esto quiere decir que el teorema esta íntimamente ligado a subespacios simplécticos en donde esta contenido el disco que forma el cilindro simpléctico.

• El desarrollo de este trabajo son los preámbulos para empezar a estudiar capacidad simpléctica.

# Bibliografía


[1] DUSA McDUFF, DIETMAR SALAMON. Introduction to Symplectic Topology. CLARENDON PRESS, 1998.

[2] SCOT ADAMS. Dynamics on LORENTZ Manifolds. World Scientific Co, 2001.

[3] Kreyszig Erwin. Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons, 1978.

[4] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Espence. Linear Algebra. Prentice Hall, 2012.

[5] Sheldon A. Linear Algebra Done Right. Springer, 2004.

[6] Manfredo Do Carmo. Differential forms and applications. Springer, 2000.