

# Théorie de Morse, géométrie symplectique et un théorème de convexité

Alejandro Rivera

31 août 2013

## Résumé

L'objectif de ce document est d'énoncer le théorème de convexité de Atiyah, Guillemin et Sternberg et d'en présenter une démonstration. Celle-ci emploie des méthodes de théorie de Morse. Nous commençons par expliquer ce qu'est une action hamiltonienne sur une variété symplectique. Puis nous présentons le résultat de théorie de Morse utile pour la suite. Enfin, nous énonçons et démontrons le théorème.

## 1 Actions de groupes de Lie sur des variétés

### 1.1 Groupes de Lie

Considérons l'équation différentielle suivante, d'inconnue  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

Un rapide calcul montre que les solutions de ce système sont définies sur  $\mathbb{R}$  et périodiques de période  $2\pi$ . Le flot de ce système s'écrit alors, en coordonnées polaires,  $\phi_\alpha(\rho, \theta) = (\rho, \theta + \alpha)$  où  $\rho \geq 0$  est le module et  $\theta \in \mathbb{R}$  l'argument. Ce flot définit une famille de difféomorphismes  $(\phi_\alpha)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \phi_\beta \circ \phi_\alpha &= \phi_{\beta+\alpha} \\ \phi_0 &= id \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi_{\alpha+2\pi} &= \phi_\alpha\end{aligned}$$

Cette famille peut alors être vue comme une action du groupe  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous allons généraliser cet exemple par la notion de groupe de Lie.

**Définition 1** Soit  $(G, m, \iota)$  un groupe. Ici,  $m$  est la loi interne du groupe et  $\iota$  l'inversion. Supposons que  $G$  admette une structure de variété lisse pour laquelle  $m$  et  $\iota$  soient différentiables. Alors, on dit que  $G$  est un groupe de Lie.

Dans l'exemple précédent, l'action du groupe était associée à une structure infinitésimale que nous généralisons ici.

**Définition 2** Soit  $G$  un groupe de Lie. On appelle algèbre de Lie de  $G$  et on note  $\mathfrak{g} = T_e G$  l'espace tangent à  $G$  à l'unité.

Pour tout  $g \in G$ , notons  $L_g : G \rightarrow G$  l'application de multiplication à gauche par  $g$ . A tout élément  $\xi \in \mathfrak{g}$  on associe un champ vectoriel  $\xi^\#$  défini par  $\xi_g^\# = d_e L_g(\xi)$ . Remarquons que pour tous  $g, h \in G$ ,  $d_h L_g(\xi_h^\#) = \xi_{L_g(h)}^\# = \xi_{gh}^\#$ . On dit que ce champ est invariant à gauche. Notons  $\chi^L(G)$  l'espace des

champs vectoriels invariants à gauche.  $X \mapsto X_e$  définit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\chi^L(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ .

Rappelons que le crochet de Lie de deux champs vectoriels  $X, Y \in \chi(M)$  est le champ  $[X, Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0} d\psi_t^{-1} X_{\psi_t}$  où  $\psi_t$  est le flot associé à  $Y$ . Rappelons aussi que cette opération est bilinéaire anti-symétrique et qu'elle vérifie l'identité de Jacobi :  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ .

$\chi^L(M)$  est stable par crochet de Lie et définit donc une sous-algèbre de Lie de  $\chi(M)$ . Ce crochet induit donc un crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  défini par  $[\xi, \eta]_{\mathfrak{g}} = [\xi^{\sharp}, \eta^{\sharp}]_e$ .

Soit  $Int : G \rightarrow Aut(G)$  défini par  $\forall g, h \in G, Int_g(h) = ghg^{-1}$ . Alors, pour tout  $g \in G$ ,  $Int_g$  est différentiable en  $e$  et  $Int_g(e) = e$ . Notons  $Ad_g \in GL(\mathfrak{g})$  sa différentielle en ce point. On vérifie alors que la différentielle  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$  de  $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  ainsi construite est l'application  $\xi \mapsto [\xi, \bullet]$ .

Etant donné un élément  $\xi \in \mathfrak{g}$ , il existe une unique courbe intégrale  $\gamma : ]-\alpha, \alpha[ \rightarrow G$  telle que  $\gamma(0) = e$  et  $\dot{\gamma} = \xi_{\gamma}^{\sharp}$ . Pour  $\xi$  dans un voisinage de 0, cette courbe est définie sur  $]-\alpha, 1 + \alpha[$ . On note alors  $exp(\xi) = \gamma(1)$ . L'application exponentielle  $exp$  est ainsi définie sur un voisinage de  $0 \in \mathfrak{g}$ . Nous énonçons ici sans démonstration quelques unes de ses propriétés.

- $exp(0) = e$ .
- $exp$  est un difféomorphisme local d'un voisinage de  $0 \in \mathfrak{g}$  dans un voisinage de  $e \in G$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  assez petit et tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $\frac{d}{dt}|_{t=0} exp(t\xi) = \xi$ .
- Pour tous  $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$  tels que  $[\xi, \zeta] = 0$ ,  $exp(\xi).exp(\zeta) = exp(\xi + \zeta)$ .

## 1.2 Actions de groupe

**Définition 3** Soit  $G$  un groupe de Lie. Soit  $M$  une variété lisse. Une action (lisse) de  $G$  sur  $M$  est une application lisse  $\rho : G \times M \rightarrow M$  telle que :

- $\forall x \in M, \rho(1, x) = x$ .
- $\forall g, h \in G, x \in M, \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$ .

Par souci de légèreté on notera  $g \star x = \rho(g, x)$ .

Remarquons qu'une action  $\rho$  d'un groupe  $G$  sur une variété  $M$  définit une famille de difféomorphismes  $(\psi_g)_{g \in G}$ .

Exemples :

- Le système précédent peut être vu comme une action de  $S^1$  sur  $\mathbb{C}$  par multiplication.
- Pour tout groupe de Lie  $G$ ,  $G$  agit sur lui même par translation à gauche. Pour tout  $g \in G$ , notons  $L_g : G \rightarrow G$  l'application définie par  $L_g(h) = gh$ . Alors  $(g, h) \mapsto L_g(h)$  est une action de  $G$  sur  $G$ .
- $U(n)$  est un groupe de Lie qui agit sur  $H(n)$  l'espace des matrices hermitiennes de taille  $n$  par conjugaison :  $(g, m) \mapsto gmg^{-1}$ .
- L'action adjointe d'un groupe de Lie  $G$  est l'action de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $(g, X) \mapsto Ad(g)X$ .
- De l'action adjointe on déduit immédiatement l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$  définie par  $\forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}, \langle g \star \xi, X \rangle := \langle \xi, Ad(g^{-1})X \rangle$ . En particulier, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  de  $U(n)$  est l'espace des matrices anti-hermitiennes et l'action coadjointe de  $U(n)$  sur  $\mathfrak{u}(n)$  est simplement la conjugaison.
- Le tore  $T = (S^1)^n$  agit sur  $\mathbb{C}P^n$  de la manière suivante. Soient  $\zeta = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \in T$  et  $z = [z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n$ . On définit l'action de  $\zeta$  sur  $z$  par :

$$\zeta \star z = [z_0 : e^{i\theta_1} z_1 : \dots : e^{i\theta_n} z_n].$$

Il est aisé de vérifier que c'est bien une action de groupe.

**Définition 4** Etant donnée une action d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété lisse  $M$ , on peut associer à chaque élément  $X \in \mathfrak{g}$  un champ vectoriel  $\hat{X}$ , appelé champ vectoriel fondamental associé à  $X$  défini par :  $\forall x \in M, \hat{X}_x = \frac{d}{dt}|_{t=0} (exp(tX) \star x)$ .

## 2 Une courte introduction à la géométrie symplectique

### 2.1 Variétés symplectiques

En mécanique hamiltonienne, l'information d'une particule est portée par sa position  $q \in \mathbb{R}^n$  et son moment  $p \in \mathbb{R}^n$ . La dynamique du système est déterminée par une fonction  $H(p, q, t)$ , appelée le *hamiltonien*. L'évolution du système est alors décrite par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= -\frac{\partial H}{\partial p}\end{aligned}$$

Ces équations peuvent se résumer par :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J_0 \nabla H(p, q, t)$$

où  $J_0$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Remarquons que  $J_0$  est la matrice d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée et  $\nabla$  est le gradient associé aux variables  $p, q$ . Ces observations conduisent aux définitions suivantes.

**Définition 5** Soit  $E$  un espace vectoriel. Supposons qu'il existe une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée  $\omega$  sur  $E$ . Alors le couple  $(E, \omega)$  forme un espace vectoriel symplectique.

Etant donné une telle structure on peut considérer l'orthogonal symplectique d'un sous-espace vectoriel.

**Définition 6** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel symplectique  $(E, \omega)$ . L'orthogonal symplectique de  $F$  est

$$F^\omega = \{u \in E \mid \forall v \in F, \omega(u, v) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On dit qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  est symplectique si  $F \cap F^\omega = \{0\}$ . Dans ce cas,  $F$  muni de  $\omega|_F$  est un espace vectoriel symplectique (la forme induite est non-dégénérée). On dit qu'il est isotrope si  $F \subset F^\omega$ . Dans ce cas, on peut montrer que  $2\dim(F) \leq \dim(E)$ .

**Définition 7** Soit  $M$  une variété lisse. Supposons qu'il existe une forme différentielle  $\omega$  fermée, bilinéaire, anti-symétrique non-dégénérée. Alors le couple  $(M, \omega)$  forme une variété symplectique.

La forme  $\omega$  définit alors un isomorphisme entre  $\Omega^1(M)$  l'espace des 1-formes différentielles sur  $M$ , et  $\chi(M)$  l'espace des champs vectoriels sur  $M$ . Cet isomorphisme est le suivant :

$$\begin{aligned}\chi(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto \iota_X \omega = \omega(X, \bullet)\end{aligned}$$

Sa réciproque, à l'instar de la définition du gradient, associe à une forme différentielle un champ vectoriel. En particulier, à toute fonction lisse  $f$  sur  $M$  elle associe un champ vectoriel appelé gradient symplectique de  $f$  (dans l'exemple précédent, le gradient symplectique de  $H$  est  $J_0 \nabla H$ ).

Cette nouvelle structure invite la définition d'une nouvelle classe de morphisme.

**Définition 8** Soient  $(M, \omega)$  et  $(N, \nu)$  deux variétés symplectiques. On dit qu'un difféomorphisme  $\psi : M \rightarrow N$  est un symplectomorphisme si  $\psi^* \omega = \nu$ , où  $(\psi^* \omega)_x(u, v) = \omega_{\psi(x)}(d\psi_x(u), d\psi_x(v))$ .

*Exemples :*

- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  muni de la forme  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  est un espace vectoriel symplectique.
- L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  muni de la forme de Fubini-Study

$$\omega = \frac{i}{2|z|^4} \sum_{0 \leq j, k \leq n} (|z_j|^2 dz_k \wedge d\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k dz_j \wedge d\bar{z}_k)$$

est une variété symplectique. Considérons le système de cartes  $U_j = \{[z_0 : \dots : z_n] | z_j \neq 0\}$ ,  $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$  où  $\phi([z_0 : \dots : z_n]) = (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{\hat{z}_j}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j})$ . Alors les changements de cartes sont des symplectomorphismes.

## 2.2 Théorème de Darboux équivariant

Un résultat facile d'algèbre linéaire montre que pour tout espace vectoriel symplectique  $(E, \omega)$ , il existe un isomorphisme linéaire  $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\Psi^* \omega = \omega_0$ . En particulier c'est le cas pour l'espace tangent en un point donné d'une variété symplectique. Le théorème de Darboux permet de passer d'un résultat ponctuel à un résultat local. Ici nous énonçons directement une version équivariante de ce résultat dans le cadre d'une action de groupe.

Nous commençons par présenter l'argument de Moser.

**Lemme 1** *Considérons une famille lisse de formes symplectiques  $\omega_t \in \Omega^2(M)$  sur une variété compacte  $M$ , telle qu'il existe une famille lisse de formes  $\sigma_t \in \Omega^1(M)$  pour lesquelles  $\frac{d}{dt} \omega_t = d\sigma_t$ . Alors il existe une famille lisse de difféomorphismes  $\psi_t$  tels que  $\psi_t^* \omega_t = \omega_0$ .*

*Démonstration :* Pour tout  $t$ , comme  $\omega_t$  est non dégénérée il existe un unique champ vectoriel  $X_t$  tel que  $\sigma_t + \iota_{X_t} \omega_t = 0$ . Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une famille de difféomorphismes  $\psi_t$  tels que  $\frac{d}{dt} \psi_t = X_t \circ \psi_t$ . On vérifie qu'ils conviennent.  $\square$

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 1** *Soit  $M$  une variété munie de deux structures symplectiques  $\omega^0$  et  $\omega^1$ . Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur  $M$  par difféomorphismes  $\psi_g, g \in G$  préservant les deux structures symplectiques. Soit  $x \in M$  fixé par  $G$  tel que  $\omega_x^0$  et  $\omega_x^1$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x$  et un difféomorphisme  $G$ -équivariant  $f : V \rightarrow M$  tel que  $f(x) = x$  et  $f^* \omega_1 = \omega_0$  sur  $V$ .*

*Démonstration :* Considérons la famille de formes  $\omega^t = \omega^0 + t(\omega^1 - \omega^0)$ . Notons  $\tau = \omega^1 - \omega^0$ . Considérons un voisinage  $V$  simplement connexe de  $x$ .  $\tau$  est fermée donc exacte sur  $V$ . Soit  $\beta$  tel que  $d\beta = \tau$ . Soit  $\alpha$  la moyenne de  $\beta$  par l'action de  $G$  (nous ne tenterons pas d'expliciter cette notion). Alors  $\alpha$  est  $G$ -équivariante et  $d\alpha = \tau$ . Soit  $X_t$  le champ vectoriel défini par  $\iota_{X_t} \omega^t + \alpha = 0$ . Soit  $\phi_t$  le flot associé à la famille  $(X_t)$  de champs vectoriels. Quitte à rétrécir  $V$ , on peut supposer que le flot est défini pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors, pour tout  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega^t &= \phi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega^t + \phi_t^* \tau \\ &= \phi_t^* d(\iota_{X_t} \omega^t) + \phi_t^* \tau \\ &= \phi_t^* d(-\alpha) + \phi_t^* d(\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc,  $\phi_1^* \omega^1 = \phi_0^* \omega^0 = \omega^0$ . Reste à montrer que  $\phi_1$  est bien  $G$ -équivariant. Mais ceci découle du fait que  $\alpha$  est  $G$  invariante.  $\square$

Ce théorème ne nous servira qu'indirectement, à travers le corollaire suivant.

**Proposition 1** *Il existe un symplectomorphisme local  $G$ -équivariant  $(T_x M, 0, \omega_x) \rightarrow (X, x, \omega)$ .*

*Démonstration* : On considère l'exponentielle  $exp$  associée à une métrique riemannienne  $G$  équivariante. Soit  $\omega^0 = exp^* \omega$  et soit  $\omega^1 = \omega_x$ . Alors il existe un difféomorphisme  $G$  équivariant  $\Psi$  défini sur un voisinage de 0 dans  $T_x M$  tel que  $\Psi^* \omega^1 = \omega^0$ . Mais  $exp$  est un difféomorphisme local  $G$ -équivariant. Donc  $exp \circ \Psi$  est le symplectomorphisme annoncé.  $\square$

## 2.3 Structure presque complexe

Une structure presque complexe permet de faire le lien entre la géométrie symplectique et la géométrie riemannienne. Nous invitons le lecteur non familier avec les notions de métrique riemannienne ou d'exponentielle associée à cette métrique à se référer à l'annexe.

**Définition 9** *Soit  $(E, \omega)$  un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe  $J$  sur  $E$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $J^2 = -Id_E$ .*

*On dit que  $J$  est compatible avec  $\omega$  si  $\omega(\bullet, J\bullet)$  est définie positive.*

*Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. On appelle structure presque complexe sur  $M$  toute application qui à chaque point  $x$  de  $M$  associe une structure complexe  $J_x$  sur  $T_x M$ . On dit que  $\omega$  est compatible avec  $J$  si pour tout  $x \in M$ ,  $\omega_x$  et  $J_x$  sont compatibles. Alors, la forme  $g(\bullet, \bullet) = \omega(\bullet, J\bullet)$  est une métrique riemannienne sur  $M$ .*

**Proposition 2** *Soit  $(E, \omega)$  un espace vectoriel symplectique muni d'une structure complexe  $J$  compatible. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est stable par  $J$  alors il est symplectique.*

*Démonstration* : Supposons  $F$  stable par  $J$ . Soit  $u \in F \cap F^\omega$ . Alors  $Ju \in F$  donc  $\omega(u, Ju) = 0$ . La compatibilité de  $J$  implique que  $u = 0$ .  $\square$

## 3 Géométrie hamiltonienne

Ici nous établissons le lien entre les actions de groupe est la géométrie symplectique. Nous allons considérer un certain type d'action de groupe qui est compatible avec la structure symplectique de la variété.

### 3.1 Champs vectoriels hamiltoniens

**Définition 10** *Un champ vectoriel  $X \in \chi(M)$  est dit hamiltonien s'il existe une fonction  $H \in C^\infty(M)$  telle que  $\iota_X \omega = dH$ . Réciproquement, pour toute fonction  $H$  lisse sur  $M$ , il existe un unique champ de vecteurs, noté  $X_H$ , tel que  $\iota_{X_H} \omega = dH$ .  $H$  est appelé le Hamiltonien du champ vectoriel associé.*

*Exemples :*

- Dans le cas de l'action du cercle sur le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la structure symplectique  $\omega_0 = dx \wedge dy$  le champ vectoriel découle du hamiltonien  $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
- Considérons, pour  $M = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  l'espace des phases,  $m, g \in \mathbb{R}$  et  $(q, p) \in M$ ,  $H(q, p) := \frac{p^2}{2m} + gq_3$  où  $q_3$  est la projection de  $q$  selon la troisième coordonnée. On munit  $M$  du système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$  et de la forme symplectique  $\omega_0 = \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge dy_i$ . Alors,  $X_H = (\frac{p}{m}, (0, 0, -g))$ . On observe dans cet exemple comme le hamiltonien joue le rôle de l'énergie d'une particule et le gradient symplectique de ce dernier la force associée au mouvement de cette dernière.

A partir de cette définition, on peut construire un crochet de Lie sur les fonctions lisses sur  $M$ .

**Définition 11** *Soient  $F, G \in C^\infty(M)$ . Alors le crochet de Poisson de  $F$  et  $G$  est  $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$ .*

C'est une application bilinéaire antisymétrique qui vérifie l'identité de Jacobi et plusieurs autres propriétés intéressantes :

**Proposition 3** *Tout d'abord, pour tout hamiltonien  $F$ , le flot  $\phi_F^t$  associé au champ  $X_F$  définit une famille de symplectomorphismes.*

*Par ailleurs, l'espace  $Ham(M)$  des champs de vecteurs hamiltoniens est stable par crochet de Lie. Plus précisément,  $\forall F, G \in C^\infty(M)$ ,  $[X_F, X_G] = X_{\{F, G\}}$ .*

*Enfin, étant donnés deux hamiltoniens  $F$  et  $G$ ,  $G$  est préservé par le flot  $\phi_F^t$  de  $F$  si et seulement si  $\{F, G\} = 0$ .*

Nous choisissons ici, comme dans [1], la convention suivante :  $[X, Y] = \mathcal{L}_Y X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_t^* X$  où  $\psi_t$  est le flot associé à  $Y$  et  $(\psi^* X)(x) := d\psi_x^{-1} X(\psi(x))$ . (Une discussion intéressante sur la pertinence de ce choix de conventions est proposée p.84 du livre de McDuff et Salomon.)

*Démonstration* : Pour le premier résultat, remarquons qu'il suffit de montrer que  $\frac{d}{dt}(\phi_F^t{}^* \omega) = 0$ . Mais,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi_F^t{}^* \omega) &= \phi_F^t{}^* \mathcal{L}_{X_F} \omega \\ &= \phi_F^t{}^* (\iota(X_F) \circ d\omega + d \circ \iota(X_F) \omega) \\ &= \phi_F^t{}^* (d(dF)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puis,  $[X_F, X_G] = -\frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_F^t{}^* X_G$ .

Mais, pour tout symplectomorphisme  $\psi$  et tout hamiltonien  $H$ ,

$\iota(X_{H \circ \psi} \omega) = d(H \circ \psi) = \psi^* dH = \psi^* \iota(X_H) \omega = \iota(\psi^* X_H) \omega$ . Donc  $\psi^* X_H = X_{H \circ \psi}$ .

On en déduit que,  $[X_F, X_G] = -\frac{d}{dt}|_{t=0} X_{G \circ \phi_F^t}$ .

Maintenant,

$$\begin{aligned} \iota([X_F, X_G]) \omega &= -\frac{d}{dt}|_{t=0} \iota(X_{G \circ \phi_F^t} \omega) \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0} d(G \circ \phi_F^t) \\ &= -d\left(\frac{d}{dt}|_{t=0} (G \circ \phi_F^t)\right) \\ &= -d(dG(X_F)) \\ &= -dG, F \\ &= d\{F, G\}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $Ham(M)$  forme une algèbre de Lie.

Enfin, le dernier résultat découle simplement du fait que  $\frac{d}{dt} G(\phi_F^t) = \{G, F\}$ . □

Maintenant appliquons cette notion aux champs vectoriels fondamentaux des éléments d'une algèbre de Lie.

### 3.2 Actions hamiltoniennes

**Définition 12** *Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur une variété  $M$ . L'action de  $G$  est dite hamiltonienne si : Il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$  où l'espace d'arrivée est muni du crochet de Poisson  $\{, \}$ ,  $X \mapsto H_X$  tel que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$   $H_X$  est un hamiltonien pour  $\hat{X}$ .*

Etant donnée une telle action, on peut réunir l'information de tous les  $H_X$  en une seule application.

**Définition 13** *Considérons une action hamiltonienne d'un groupe  $G$  sur une variété  $M$  avec un homomorphisme  $X \mapsto H_X$  comme celui défini ci-dessus. Alors, pour tout  $p \in M$ ,  $X \mapsto H_X(p)$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ . On définit ainsi l'application moment de l'action  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  par  $\langle \mu(p), X \rangle = H_X(p)$ .*

*Exemples :*

- Etant donné un groupe de Lie  $G$ , une action hamiltonienne de  $G$  sur une variété  $M$  de moment  $\mu$  et un sous-groupe de Lie  $H$ , l'action de  $H$  sur  $M$  est hamiltonienne de moment de la forme  $\pi_{\mathfrak{h}} \circ \mu$  où  $\pi_{\mathfrak{h}}$  est une projection sur l'algèbre de Lie de  $H$ .
- L'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}^*$  induit une action sur chaque orbite  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ . Une telle orbite est alors une variété telle que  $\forall \eta \in \mathcal{O}, T_\eta \mathcal{O} = \{ad(\xi)^* \eta \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$ . On peut alors la munir d'une forme symplectique  $\omega$  définie par  $\omega_\eta(ad(\xi_1)^* \eta, ad(\xi_2)^* \eta) = \langle \eta, [\xi_1, \xi_2] \rangle$ . On vérifie que cette forme est bien fermée, anti symétrique et non dégénérée. Alors, l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  est hamiltonienne et le moment est l'inclusion de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathfrak{g}$ .
- Considérons l'action du tore  $T$  sur  $\mathbb{C}P^n$  définie dans la section 1.2. En munissant  $\mathbb{C}P^n$  de la structure symplectique définie dans la section 2.1, l'action est hamiltonienne de moment

$$\mu([z_0 : \dots : z_n]) = \frac{i}{2|z|^2} (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2).$$

Le deuxième exemple étant utile pour la suite, nous jugeons utile de présenter une courte justification. Tout d'abord, en identifiant  $\mathfrak{g}^*$  à son plan tangent, le champ vectoriel fondamental associé à un élément  $\xi_1 \in \mathfrak{g}$  pour l'action coadjointe est

$$\langle \hat{\xi}_\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, -ad(\xi)\zeta \rangle = \langle \eta, [\zeta, \xi] \rangle = \omega_\eta(\xi, \zeta).$$

Puis, le noyau de la forme  $\omega_\eta$  est le stabilisateur  $\mathfrak{g}_\eta$  de  $\eta$  pour l'action  $ad^*$ . Par ailleurs, l'orbite  $\mathcal{O}$  de  $\eta$  est l'image de  $W = G/G_\eta$  par le quotient de l'application  $\xi \mapsto Ad(g)^* \eta$ , qui est une immersion  $f$ . Comme le groupe est compact, cette immersion est propre et  $\mathcal{O}$  est une sous-variété de  $\mathfrak{g}^*$ . Son plan tangent en  $Ad(g)^* \eta$  est l'image par  $df_{g.G_\eta}$  du plan tangent  $T_{g.G_\eta} W = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\eta$ . Il s'en suit que  $\omega$ , définie sur  $\mathcal{O}$ , est partout non dégénérée. Un calcul rapide montre qu'elle est fermée. On vérifie alors que l'inclusion  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  est bien l'application moment pour l'action coadjointe.

**Proposition 4** *Considérons une action hamiltonienne d'un groupe  $G$  sur une variété  $M$ , d'application moment  $\mu$ . Alors, pour tout  $x \in M$ ,*

$$\begin{aligned} Im(d\mu_x) &= \mathfrak{g}_x^0 \\ Ker(d\mu_x) &= (T_x \mathcal{O})^{\omega_x} \end{aligned}$$

Ici,  $\mathfrak{g}_x^0$  désigne l'annulateur de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de  $x$  et  $\mathcal{O}$  l'orbite de  $x$  par l'action de  $G$ .

*Démonstration :* Soient  $u \in T_x M$  et  $X \in \mathfrak{g}_x$ . Alors,

$$\begin{aligned} \langle d\mu_x(u), X \rangle &= d\langle \mu, X \rangle_x(u) \\ &= d_x H_X(u) \\ &= \omega_x(\hat{X}, u). \end{aligned}$$

On obtient ainsi les deux résultats annoncés.

## 4 Théorie de Morse

La théorie de Morse étudie les points critiques de fonctions lisses sur des variétés pour obtenir des informations topologiques sur ces dernières. Lors de la démonstration du théorème nous allons utiliser un résultat de théorie de Morse, que nous présentons ici.

Nous nous intéressons ici à une certaine classe de fonctions dont l'étude des points critiques est accessible.

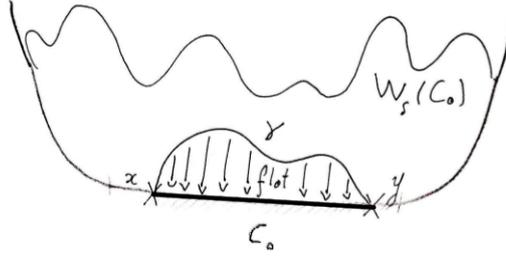


FIGURE 1 – rabatement par le flot sur  $C_0$

**Définition 14** Soit  $M$  une variété lisse et soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction de Morse-Bott si :

- L'ensemble de ses points critiques  $\text{Crit}(f)$  est une sous-variété de  $M$ .
- $\forall x \in \text{Crit}(f), T_x \text{Crit}(f) = \text{Ker} \nabla^2 f(x)$ , où  $\nabla^2 f(x)$  est la hessienne de  $f$  au point  $x$ .

Dans ce cas, pour tout point critique  $x$  de  $f$ ,  $T_x M$  se décompose en  $T_x \text{Crit}(f) \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$  où  $E_x^+$  (resp.  $E_x^-$ ) est le sous-espace engendré par les valeurs propres strictement positives (resp. négatives) de la hessienne de  $f$ .

On appelle fibrés normaux positif et négatif les ensembles  $E^+ = \cup_{x \in C} \{x\} \times E_x^+$  et  $E^- = \cup_{x \in C} \{x\} \times E_x^-$ . Pour tout sous-ensemble  $C$  de  $M$ , on note  $W^s(C)$  (resp.  $W^i(C)$ ) et on appelle variété stable (resp. instable) l'ensemble des points qui, sous l'action du gradient négatif (resp. positif) de  $f$ , ont un ensemble oméga-limite inclus dans  $C$ .

Enfin, pour toute composante connexe  $C$  de  $\text{Crit}(f)$ ,  $W^s(C)$  et  $W^i(C)$  sont des sous-variétés de  $M$  de codimensions respectives  $n^-(C)$  et  $n^+(C)$  appelées indice et coindice de  $C$ .

*Remarque* : Une propriété élémentaire des fonctions de Morse-Bott sur une variété compacte sans bord est que sous le flot du gradient négatif, tout point converge vers un point critique.

Nous énonçons maintenant le résultat utilisé dans la démonstration du théorème. Une esquisse de démonstration alternative est proposée en annexe.

**Proposition 5** Soit  $f$  une fonction de Morse-Bott sur une variété lisse, compacte, connexe  $M$ . Supposons que toute composante connexe de la variété critique  $\text{Crit}(f)$  de  $f$  soit d'indice et de coindice différent de 1 (remarquons que ces composantes peuvent changer de dimension mais que  $\text{Crit}(f)$  est bien une variété). Alors les fibres  $(f^{-1}(c))_{c \in \text{Crit}(f)}$  sont connexes (ou vides).

*Idée de démonstration* : Premièrement, on note  $C_0$  la réunion de toutes les composantes critiques d'indice 0. Alors  $W^s(C_0)^c$  est de codimension  $\geq 2$  puisque les indices sont  $\neq 1$  donc  $W^s(C_0)$  est connexe. Puis, on montre que  $C_0$  est connexe en joignant deux points arbitraires par un chemin  $\gamma$  dans la variété stable de  $C_0$  et en le rabattant sur  $C_0$  par le flot du gradient négatif de  $f$  comme illustré dans la figure 1. Par symétrie,  $C_N$  l'ensemble des composantes de coindice nul est connexe. Ces deux variétés sont donc les fibres des extrema absolus de  $f$ .

Deuxièmement on montre par récurrence sur les valeurs critiques  $c_0 < c_1 < \dots < c_N$  que les fibres des valeurs régulières sont connexes. Tout d'abord, pour tout  $c_0 < c < c_1$ , deux points de cet ensemble peuvent être joints par le flot à deux points du niveau minimal  $C_0$  et ces deux nouveaux points peuvent être joints par un chemin dans ce niveau. Par un argument de transversalité (ici admis) on peut perturber ce chemin pour qu'il soit inclus dans  $W^s(C_0) - C_0$ . Comme le niveau  $f^{-1}(c)$  est une transversale de ce champ, l'application  $x \mapsto$  le point d'intersection de la trajectoire de  $x$  et du niveau  $f^{-1}(c)$ , est continue sur un voisinage de chaque point du chemin construit (on utilise ici le théorème de redressement du champ), par compacité, elle est continue sur tout le chemin. On peut alors rabattre

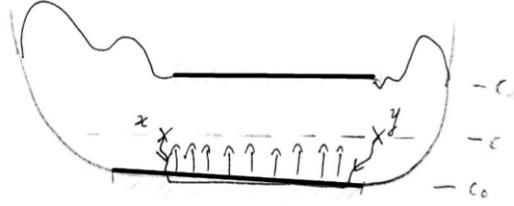


FIGURE 2 – rabattement par le flot sur  $f^{-1}(c)$

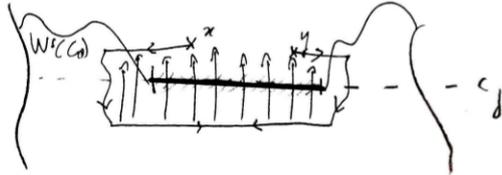


FIGURE 3 – connexité de  $f^{-1}(c)$

le chemin sur le niveau  $c$  comme on peut le voir dans la figure 2.

Par ailleurs, comme  $W^s(C_0)^c$  est de codimension  $\geq 2$  et  $W^s(C_0)$  est connexe, cette dernière intersecte toutes les composantes connexes de chaque niveau de  $f$ . Soit  $c_j < c < c_{j+1}$ . Supposons que chaque niveau régulier  $< c_j$  soit connexe. Ayant choisi deux points arbitraires de ce niveau, on peut joindre chacun d'eux à un point de la variété stable du minimum global, joindre chacun de ces points à un point d'un niveau régulier  $c' < c_j$ , joindre ces deux derniers par un chemin dans  $f^{-1}(c')$  et rabattre le chemin sur  $f^{-1}(c)$  comme avant (voir figure 3).

Enfin, pour le cas des valeurs critiques  $c_j < c_N$  on considère l'application suivante  $\psi : f^{-1}(c_j + \epsilon) \rightarrow f^{-1}(c_j)$  (où  $c_j + \epsilon < c_{j+1}$ ) qui a un point associé à sa limite par le flot négatif si elle se trouve dans le niveau  $c_j$  et le point d'intersection de sa trajectoire avec le niveau sinon. Comme toute sous-variété critique  $C$  de ce niveau est de coindice  $\geq 2$ , cette application est surjective. On peut par ailleurs montrer que  $\psi$  est continue. Les niveaux critiques sont donc aussi connexes.  $\square$

Il se trouve par ailleurs que l'application moment induit une famille d'applications de Morse-Bott de ce type, fournissant ainsi beaucoup d'information sur la variété  $M$ .

**Proposition 6** *Considérons une action hamiltonienne d'un tore  $T$ ,  $T : \rightarrow \text{Symp}(M)$ ,  $\theta \mapsto \psi_\theta$  sur une variété symplectique  $M$  de moment  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$  où  $\mathfrak{t}$  est l'algèbre de Lie de  $T$ . Alors, pour tout  $\eta \in \mathfrak{t}$ ,  $H_\eta = \langle \mu, \eta \rangle$  est une fonction de Morse-Bott de variétés connexes critiques d'indices pairs. De plus, ses composantes critiques sont des sous-variétés symplectiques de  $M$ .*

*Idée de démonstration :* On commence par construire une métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ , invariante par l'action du tore. La structure presque-complexe associée rend unitaires les différentielles des symplectomorphismes de l'action. Puis, au voisinage de chaque point critique  $x$ , on considère l'application exponentielle  $\exp_x$  construite à partir de la métrique riemannienne. L'invariance de la métrique implique que pour tout  $a \in T$ ,  $\psi_a \circ \exp_x = \exp_x \circ D\psi_a(x)$  donc, pour  $\theta \in \mathfrak{t}$ , les points critiques de  $H_\theta$ , qui sont les points fixes de l'action d'un sous-groupe  $G$  de  $T$  sont une sous-variété  $C$  de  $M$  telle que  $\forall x \in C, T_x C = \cap_{\eta \in \mathfrak{g}} \text{Ker}(D\psi_{\exp(\eta)}(x) - id)$ . Les endomorphismes étant unitaires, ces sous-espaces sont symplectiques, et en particulier, de dimension paire.

Considérons maintenant la hessienne  $S_x = \nabla^2 H(x) : T_x M \rightarrow T_x M$  de  $H = \langle \mu, \theta \rangle$  pour un certain  $\theta \in \mathfrak{t}$ , en un point critique  $x$  de  $H$ . Notons  $\Phi_{t\theta} = D_x \psi_{\exp(t\theta)}$ . On obtient ainsi une famille d'endomorph-

phismes de  $T_x M$ . Soit  $v \in T_x M$  et soit  $\gamma_s] - \delta, \delta[ \rightarrow M$  une courbe lisse passant par  $x$  au temps 0 avec une vitesse  $v$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi_{t\theta}(v)) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \psi_{\exp(t\theta)}(\gamma_s) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi_{\exp(t\theta)}^* X_H(\gamma_s) \\ &= \psi^* X_H(\gamma_s)^* \left( \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} X_H(\gamma_s) \right). \end{aligned}$$

Par le lemme de Darboux équivariant, au voisinage de  $x$ , il existe une carte qui fixe  $J$  la structure presque complexe. Dans ce système de coordonnées,  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} X_H(\gamma_s) = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} J_x \nabla H(\gamma_s) = S_x v$ .

On en déduit que le flot associé au champ vectoriel linéaire  $-J_x S_x$  sur  $T_x M$  est  $\Phi_{t\theta}$ . En particulier  $-J_x \text{Ker}(S_x) = \text{Ker}(-J_x S_x) = \cap_{\eta \in \mathfrak{g}} \text{Ker}(id - D\psi_{\exp(\eta)}(x)) = T_x C$ . C'est une variété symplectique. Elle est donc stable par  $J_x$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(S_x) = T_x C$  et  $H$  est bien une fonction de Morse-Bott. Par ailleurs, les  $\Phi_{t\theta}$  étant unitaires,  $S_x$  commute avec  $J_x$  donc ses sous-espaces sont stables par  $J_x$  donc de dimension paire. Les indices et coindices des sous-variétés connexes critiques sont pairs.  $\square$

*Remarque* : En particulier ce sont des fonctions de Morse-Bott parfaites et ont des propriétés intéressantes décrites en annexe.

## 5 Théorème de convexité d'Atiyah, Guillemin et Sternberg

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème d'Atiyah, Guillemin et Sternberg. Notons qu'un point crucial de la démonstration est la propriété des hamiltoniens  $H_\xi$  décrite ci-dessus.

**Théorème 2** *Soit  $M$  une variété symplectique compacte connexe. Considérons une action hamiltonienne d'un tore  $T$  sur  $M$  d'application moment  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$  où  $\mathfrak{t}$  est l'algèbre de Lie de  $T$ . Alors l'ensemble des points critiques est une union disjointe de sous-variétés connexes  $C_j$  de  $M$  et  $\mu(M)$  est exactement l'enveloppe convexe de l'ensemble des  $\mu(C_j)$  dans  $\mathfrak{t}$ .*

*Première étape* : Les fibres  $\mu^{-1}(\eta)$  des valeurs régulières  $\eta$  sont connexes.

Nous montrerons ce résultat par récurrence sur  $m$  la dimension du tore (et donc de l'image de  $\mu$ ). Le cas initial  $m = 1$  est une conséquence des résultats obtenus sur les fonctions de Morse-Bott en évaluant  $\mu$  contre n'importe quel vecteur de la droite  $\mathfrak{t}$ . Soit  $m > 1$ . Supposons que pour les actions de tore de dimension  $m - 1$ , les fibres de l'application moment aux valeurs régulières sont connexes. Ayant identifié  $\mathfrak{t}^*$  à  $\mathbb{R}^m$  notons  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ .

Soit  $(\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$  une valeur régulière de  $(\mu_1, \dots, \mu_{m-1})$  : pour tout  $x \in M$ , si  $\forall 1 \leq j \leq m-1, \mu_j(x) = \eta_j$  alors  $(D\mu_1(x), \dots, D\mu_{m-1}(x))$  est une famille libre de  $T_x^* M$ . Soit  $Q = \cap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j)$ . Par hypothèse de récurrence,  $Q$  est une sous-variété compacte connexe de  $M$ .

Considérons  $\mu_m : Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour que  $x \in Q$  soit un point critique de  $\mu_m|_Q$  il faut et il suffit que  $D\mu_m(x)$  soit une combinaison linéaire  $\sum_{j=1}^{m-1} \theta_j D\mu_j(x)$  des  $D\mu_j(x)$ , en effet,  $T_x Q = \cap_{j=1}^{m-1} \text{Ker}(D\mu_j(x))$ . Dans ce cas,  $x$  est un point critique de  $H_\theta$  où  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, 1)$ . Cette fonction est de Morse-Bott et  $x$  appartient à une de ses sous-variétés connexes critiques,  $C$ .

Montrons que  $C$  et  $Q$  sont transversales, c'est à dire que  $T_x M = T_x Q + T_x C$ . D'après la proposition précédente,  $C$  est une sous-variété symplectique de  $M$ . Le groupe étant commutatif,  $H_\theta$  commute avec tous les  $\mu_j$  et c'est aussi le cas pour leurs flots hamiltoniens respectifs. On en déduit que les champs hamiltoniens  $X_j$  associés aux applications  $\mu_j$  sont tangents à  $C$ . Mais, comme  $(D\mu_1(x), \dots, D\mu_{m-1}(x))$  est libre,  $(X_1(x), \dots, X_{m-1}(x))$  est une famille libre de  $T_x C$  qui engendre un sous-espace de  $T_x M$  supplémentaire à  $T_x Q$ . En ajoutant une base de  $T_x Q$ , on obtient une famille libre de rang  $n$ .  $C$  et  $Q$  sont bien transverses.

On en déduit que  $(T_x Q \cap T_x^\perp C) \oplus T_x C = T_x M$ . Mais  $H_\theta$  est une fonction de Morse-Bott donc sa

hessienne est non-dégénérée sur  $T_x Q \cap T_x^\perp C$ . De plus  $\mu_m|_Q - H_\theta|_Q = \sum_{j=1}^{m-1} \theta_j \eta_j$  est constante donc  $\mu_m|_Q$  est une fonction de Morse-Bott. Son indice et son coindice en chaque point sont les mêmes que ceux de  $H_\theta$  donc pairs. La proposition précédente permet de conclure que ses niveaux sont connexes. Pour tout  $\eta_m \in \mathbb{R}$ ,  $\mu^{-1}(\eta_1, \dots, \eta_m) = \mu_m|_Q^{-1}(\eta_m)$  est connexe. En particulier, pour toutes les valeurs régulières  $\eta$ ,  $\mu^{-1}(\eta)$  est connexe.

*Deuxième étape :* L'image de  $\mu$  est convexe. Le cas unidimensionnel découle de la connexité de  $M$ . Considérons une projection linéaire quelconque  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ . Alors la composition  $\nu = \pi \circ \mu$  est l'application moment d'une action de tore. Soit  $c$  une valeur régulière de  $\nu$ . On en déduit que  $\mu(M) \cap \pi^{-1}(c) = \mu(\nu^{-1}(c))$  est connexe ou vide. Par le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs singulières de  $\nu$  est de mesure nulle donc en particulier, l'image par  $\mu$  de l'ensemble de ces dernières est d'intérieur vide. Mais l'image de  $\mu$  est fermée donc le résultat est aussi valable pour les valeurs singulières de  $\nu$ . Comme ceci est vrai pour toutes les projections  $\pi$ , l'image de  $\mu$  est convexe.

*Troisième étape :* L'image de  $\mu$  est exactement l'enveloppe convexe de ses valeurs critiques. Pour les éléments  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in T$   $\mathbb{Q}$ -libres, l'adhérence du tore engendré par  $\theta$  est  $T$  tout entier donc la fonction  $\langle \mu, \theta \rangle$  a les mêmes valeurs critiques que  $\mu$ . En particulier, elle atteint son maximum en une telle valeur. Mais  $\langle \mu, \theta \rangle$  est la projection de  $\mu$  sur une droite. Ceci étant vrai pour presque toutes les droites de  $\mathbb{R}^m$ , on en déduit que  $\mu(M) \subset \text{Conv}(\mu(\text{Crit}(\mu)))$ .  $\square$

### Remarques

- Dans le cas de l'action hamiltonienne du tore sur  $\mathbb{C}P^n$  décrite dans la section 3.2, le polytope obtenu est un  $n$ -simplexe dont les sommets ont pour préimage les points  $[0 : \dots : 1 : \dots : 0]$  où la position du 1 varie de 0 à  $n$ . Le point  $(0, \dots, 0)$  est image de  $[1 : 0 : \dots : 0]$ .
- Si l'action est effective, alors l'ensemble des points de groupe d'isotropie trivial est dense dans  $M$ . En effet, pour tout  $a \in T$  les points fixes du sous-groupe fermé engendré par  $a$  est une union finie de sous-variétés strictes de  $M$ . Mais l'application qui à un sous-groupe de  $T$  associe son ensemble de points fixes est décroissante pour l'inclusion. Il suffit de considérer des sous-groupes unidimensionnels. Mais ce sont exactement les groupes du type  $\{(e^{i\theta_1 t}, \dots, e^{i\theta_m t}) | t \in \mathbb{R}\}$  où  $\theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{Z}$ . Il y en a un nombre dénombrable. On conclut par le lemme de Baire.
- En particulier, si l'action est fidèle, il existe un point  $p$  où l'action est libre. En ce point, l'application moment est une submersion. Son image est donc un polytope convexe d'intérieur non vide : il possède au moins  $m + 1$  sommets, où  $m$  est la dimension du tore. On en déduit que l'action possède au moins  $m + 1$  points fixes.
- Si un tore  $T$  de dimension  $m$  agit fidèlement sur une variété symplectique  $M$   $n$ -dimensionnelle de manière hamiltonienne, alors  $m \leq \frac{n}{2}$ . En effet, considérons un point  $p$  d'orbite  $O_p$   $m$ -dimensionnelle. Alors  $T_p O_p \subset \text{Ker} d\mu_p = (T_p O_p)^{\omega_p}$ . On en déduit que c'est un sous-espace isotrope de  $T_p M$ . Donc  $2\dim(T_p O_p) \leq \dim(T_p M)$ .
- Considérons  $\theta \in \mathfrak{t}$  tel que le groupe à un paramètre engendré par  $\exp(\theta)$  soit dense dans  $T$ . Alors les points critiques de  $H_\theta$  sont les mêmes que ceux de  $\mu$ . Mais nous avons vu que c'est une fonction de Morse-Bott d'indices pairs. Les inégalités de Morse, démontrées en annexe, nous apprennent que dans ce cas, le nombre  $c_\lambda$  de variétés critiques d'indice  $\lambda$  est égal au  $\lambda$ -ième nombre de Betti  $b_\lambda$ . Par ailleurs, à chaque variété critique correspond un sommet du polytope  $\mu(M)$ . En particulier la caractéristique d'Euler de  $M$  est

$$\chi(M) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda b_\lambda = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda c_\lambda = \sum_{\lambda} c_\lambda.$$

C'est le nombre de sommets de  $\mu(M)$ .

En guise d'application, nous présentons ici un résultat dû à Schur et Horn qui a servi d'inspiration pour le théorème de convexité :

**Théorème 3** Soit  $A \in \mathcal{H}(n)$  une matrice hermitienne. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  le spectre de  $A$ . Alors la diagonale  $a = (a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$  de  $A$  est une combinaison convexe des  $\sigma^* \lambda = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$

où  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Réciproquement, pour toute combinaison convexe  $a$  des  $\sigma^*\lambda$ , il existe une matrice hermitienne  $A$ , de diagonale  $a$  dont les valeurs propres comptées avec multiplicité forment le vecteur  $\lambda$ .

*Démonstration* : Considérons l'action coadjointe du groupe unitaire  $U(n)$  sur une orbite  $\mathcal{O}$  de  $\mathfrak{u}(n)^*$  que nous identifions à  $\mathfrak{u}(n) = i\mathcal{H}(n)$  par le produit scalaire  $\langle A, B \rangle := -\text{tr}(AB)$ . Alors cette action est hamiltonienne et l'application moment  $\mu$  est l'inclusion. En restreignant l'action au sous-groupe diagonal  $T$  de  $U(n)$  on obtient une action de tore hamiltonienne d'application moment la projection sur la diagonale de  $\mu$ . Les points fixes de l'action étant exactement les matrices diagonales, pour toute matrice  $A \in \mathcal{O}$ , la diagonale est une combinaison convexe des matrices diagonales de la classe de conjugaison. Le résultat est alors obtenu simplement en multipliant la matrice hermitienne par  $i$  et en appliquant ce qui précède.

## 6 Annexe

### 6.1 Géométrie Riemannienne

La démonstration du théorème utilise quelques notions de géométrie riemannienne que nous présentons ici.

**Définition 15** *Etant donnée une variété lisse  $M$ , une métrique riemannienne sur  $M$  est une section  $g \in \Gamma(S^2T^*M)$  telle que pour tout  $x \in M$ ,  $g_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  est définie positive. En d'autres mots, c'est une application lisse qui à un point  $x \in M$  associe un produit scalaire  $g_x$  sur  $T_xM$ . La variété munie d'une métrique riemannienne est appelée variété riemannienne.*

Une métrique riemannienne généralise la notion de produit scalaire du cadre euclidien. Etant donnée une variété riemannienne on peut définir une notion de longueur de chemin. A partir de cette définition on peut s'interroger sur l'existence et l'unicité de courbes de longueur minimale joignant deux points. Localement, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique les deux. Une courbe vérifiant ces propriétés est appelée géodésique. Plus d'explications sont proposées dans l'ouvrage suivant [2].

**Définition 16** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. Pour tout  $x \in M$  l'application  $\exp_x$  d'un voisinage ouvert de 0 dans l'espace tangent  $T_xM$  vers un voisinage ouvert de  $x$  dans  $M$  est celle qui à un vecteur tangent convenable  $\xi$  associe  $\gamma(1)$  où  $\gamma$  est la géodésique de vitesse constante telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = \xi$ . Chacune de ces applications  $\exp_x$  est un difféomorphisme local entre 0 et  $x$ .*

### 6.2 Un peu plus de théorie de Morse

Commençons par énoncer deux résultats fondamentaux en théorie de Morse. Ces deux résultats s'expriment dans le langage de la topologie algébrique. Nous ne tenterons pas ici de préciser les termes utilisés mais invitons le lecteur non familier avec ce vocabulaire à tout de même tenter de visualiser les constructions ici décrites.

**Théorème 4** *Soit  $M$  un cobordisme de dimension  $n$ , c'est-à-dire une variété lisse, compacte, à bord, dont le bord est l'union disjointe de deux variétés  $M_0$  et  $M_1$ . Supposons qu'il existe une fonction lisse  $f$  sur  $M$  sans points critiques telle que  $f^{-1}(0) = M_0$  et  $f^{-1}(1) = M_1$ . Alors  $M$  est difféomorphe au produit  $[0, 1] \times M_0$ .*

*Idée de démonstration* (Illustrée par la figure 4) : Choisissons une métrique riemannienne sur  $M$ . On peut alors considérer le gradient de  $f$  associé à cette métrique. On définit ainsi le champ vectoriel  $X = \frac{\text{grad}(f)}{|\text{grad}(f)|^2}$ . Soit  $\phi_t$  le flot associé à  $X$ . On définit  $\Phi : [0, 1] \times M_0 \rightarrow M$  par  $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$ . Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, comme  $M$  est compacte, cette application est bien définie sur tout le domaine annoncé et on vérifie aisément que c'est un difféomorphisme.  $\square$

*Remarque* : En particulier  $M_0$  est une rétraction par déformation de  $M$ .

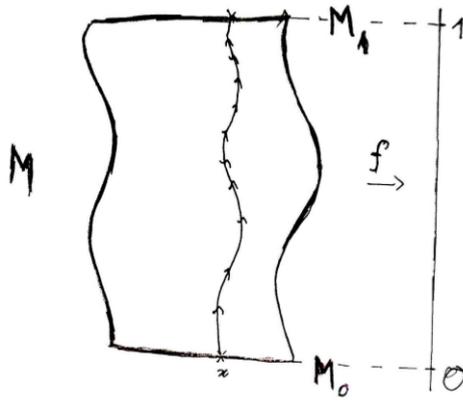


FIGURE 4 – flot de  $f$  sur  $M$

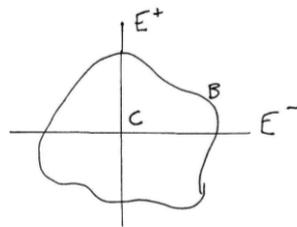


FIGURE 5 – Voisinage  $B$  de la variété critique  $C$

**Théorème 5** Soit  $M$  un cobordisme entre  $M_0$  et  $M_1$ . Supposons qu'il existe une fonction de Morse-Bott  $f : M \rightarrow [a, b]$  dont l'ensemble des points critiques forme une variété connexe  $C$ . Soient  $E^-$  le fibré normal négatif de  $C$  et  $c = f(C) \in \mathbb{R}$ . Supposons par ailleurs que  $a < c < b$ . Alors  $M$  est homotopiquement équivalent à  $f^{-1}([a, c])$  auquel on a attaché  $E^-$ .

*Idée de démonstration :* Considérons  $U_c = f^{-1}([a, c])$  et  $V_c = f^{-1}([a, c])$ . On considère un voisinage  $B$  de  $C$  formé d'images réciproques de boules  $B_x$  dans les espaces tangents à chaque point  $x$  par des cartes locales (voir la figure 5).  $B \cap V_c$  est l'ensemble des images réciproques des  $(B_x - E_x^+) \cup C$ . Mais  $B_x - E_x^+$  peut être rétracté par déformation en  $B_x \cap E_x^-$ . En appliquant cette transformation à tout le voisinage  $B$  et en utilisant ailleurs le théorème précédent, on rétracte par déformation  $V_c$  en  $U_c$  auquel on a attaché  $E^-$  (voir figure 6).  $\square$

*Exemple :* Considérons un tore  $T = S^1 \times S^1$  plongé dans l'espace euclidien tridimensionnel. Choisissons un axe orienté et considérons la fonction de projection du tore sur cet axe. Pour un bon choix de l'axe, la fonction sera de Morse-Bott (ses sous-variétés critiques seront ponctuelles). Par exemple

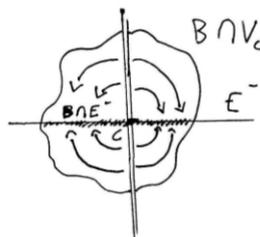


FIGURE 6 – voisinage  $B$  privé du fibré positif

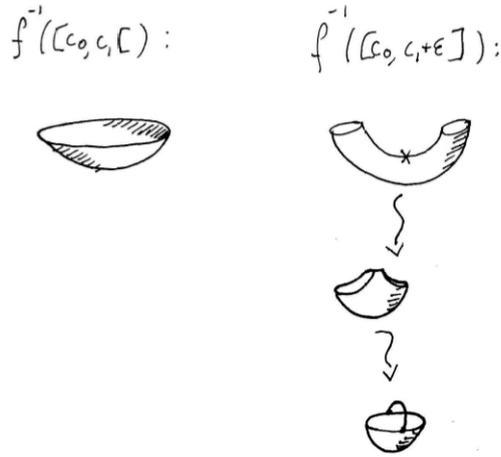


FIGURE 7 –

dans la figure 7, la fonction a un point critique d'indice 0, deux points critiques d'indice 1 et un point critique d'indice 2.

Nous sommes maintenant prêts à montrer la connexité des niveaux d'une fonction de Morse-Bott sans variétés connexes critiques d'indice ou de coindice 1.

*Démonstration alternative de la Proposition 5 :* Quitte à perturber  $f$ , on peut supposer que pour chaque valeur critique  $c$ , la fibre  $f^{-1}(c)$  ne contient qu'une variété connexe critique  $C$ . Supposons  $a < c < b$  et considérons la variation du nombre de composantes connexes entre  $A = f^{-1}([c - \varepsilon, c[)$  et  $B = f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ . D'après le deuxième théorème de cette partie il suffit de considérer la variation du nombre de composantes connexes lors de l'ajout du fibré normal négatif de  $C$ . Soit  $\hat{B}$  le résultat de cet ajout. Comme l'indice est  $\neq 1$ , le fibré de sphères  $S = \cup_{x \in C} (S_x(0, \delta) \cap E_x^-)$  de rayon  $\delta$  assez petit sur  $E^-$  est connexe (ici,  $S_x(0, \delta)$  est la sphère de centre 0 et de rayon  $\delta$  de  $T_x M$ ).

Montrons que  $\hat{B}$  a au moins autant de composantes connexes que  $A$ . En effet, soient  $x, y \in A$ . Supposons qu'ils puissent être liés par un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \hat{B}$  dans  $\hat{B}$ . Si  $\gamma$  reste dans  $A$ , alors  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe de  $A$ . Sinon, il passe par le fibré négatif. Considérons le premier instant  $t_0$  où  $\gamma$  passe par le fibré de sphères et  $t_1$  le dernier.  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t_1)$  sont liés par un chemin  $\lambda$  dans le fibré de sphères. En concaténant  $\gamma|_{[a, t_0]}$ ,  $\lambda$  et  $\gamma|_{[t_1, b]}$  on obtient un chemin entièrement contenu dans  $\hat{B} - C$ . Mais,  $\hat{B} - C$  se rétracte par déformation en  $A$ . Le chemin obtenu par déformation lie  $x$  et  $y$  dans  $A$ . Evidemment, on peut appliquer le même raisonnement à  $-f$  pour obtenir un résultat analogue pour  $A = f^{-1}(]c, c + \varepsilon])$  et  $B = f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ .

Supposons que l'ensemble des sous-variétés critiques d'indice 0 n'est pas connexe. Soient  $c_1$  et  $c_2$  les deux plus bas niveaux critiques d'indice 0 où  $c_1 < c_2$ . En considérant le plus petit niveau  $c_2 < d$  tel que  $f^{-1}(]c_1, d])$  soit connexe, on obtient une contradiction entre le principe précédent et la connexité de  $M$ . On en déduit que  $f$  n'admet qu'une sous-variété critique connexe d'indice 0. En particulier, tout minimum local est un minimum global.

Supposons qu'il existe un niveau non connexe et choisissons l'infimum  $a$  des valeurs de préimage non connexe. Alors  $a$  est une valeur critique et  $f^{-1}([a - \varepsilon, a + \varepsilon])$  a au moins autant de composantes connexes que  $f^{-1}(]a, a + \varepsilon])$ . On en déduit que la variété critique de  $a$  est d'indice 0.  $a$  est la valeur minimale de  $f$ . C'est absurde.

D'où le résultat. □

Enfin, des deux théorèmes précédents de théorie de Morse, on déduit les inégalités de Morse que nous présentons ici.

**Théorème 6** Soit  $M^n$  une variété compacte (sans bord) et soit  $f$  une fonction de Morse-Bott. Notons  $c_\lambda$  le nombre de variétés critiques d'indice  $\lambda$ . Soient  $\mathfrak{M}(t) = c_0 + c_1t + \dots + c_nt^n$  le polynôme de Morse-Bott associé à  $f$  et  $\mathfrak{P}(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$  le polynôme de Poincaré de  $M$  (ici  $b_\lambda = \dim H_\lambda(M; \mathbb{R})$ ). Alors il existe un polynôme  $R(t)$  à coefficients entiers naturels (donc positifs) tel que

$$\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{P}(t) + (1+t)R(t).$$

Dans la démonstration du théorème nous utilisons l'argument de Mayer Vitoris, que nous admettons ici :

Soit  $X$  un espace topologique. Soient  $A$  et  $B$  deux ouverts de  $X$  tels que  $X = A \cup B$ . Alors il existe une suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X) \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(X) \rightarrow \dots$$

Le lecteur intéressé pourra se référer à [3], chapitre 8, §5.

*Idée de démonstration* : Nous ne présentons ici que l'argument principal de la démonstration et nous nous restreignons au cas où les variétés sont triviales (les points critiques sont isolés). On étudie la variation des  $M_a = f^{-1}(] - \infty, a[)$  lorsque  $a$  augmente. La rétraction mise en évidence en l'absence de point critique implique que les deux polynômes  $\mathfrak{M}_a(t)$  et  $\mathfrak{P}_a(t)$  ne varient qu'au niveau des variétés critiques. Evidemment, pour  $a$  assez petit,  $\mathfrak{M}_a(t) = \mathfrak{P}_a(t) = 0$ . Lorsque  $a$  passe par une valeur critique  $c$  d'indice  $k$  alors  $\mathfrak{M}_a(t) \leftarrow \mathfrak{M}_a(t) + t^k$ . Considérons maintenant  $X = M_{c+\varepsilon}$ ,  $A = M_c$  et  $B$  la boule ouverte  $\lambda$ -dimensionnelle attachée à  $A$  pour obtenir  $X$ . Alors,  $\forall n, H_n(B) = \{1\}$ ,  $H_n(A \cap B) = \mathbb{R}$  si  $n = k-1$  et  $\{0\}$  sinon. La suite exacte de Mayer-Vitoris donne alors : pour  $n \neq k, k-1$ ,  $H_n(X) \simeq H_n(A)$  et la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow 0.$$

Des deux flèches  $H_k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \rightarrow H_{k-1}(A)$ , l'une est nulle et l'autre est surjective. On en déduit que soit  $H_{k-1}(A)/\mathbb{R} \simeq H_{k-1}(X)$  et  $H_k(A) \simeq H_k(X)$ , soit  $H_{k-1}(A) \simeq H_{k-1}(X)$  et  $H_k(X)/\mathbb{R} \simeq H_k(A)$ . Donc la variation du polynôme de Poincaré est de  $+t^k$  ou de  $-t^{k-1}$ . Donc, la variation de  $\mathfrak{M}_a(t) - \mathfrak{P}_a(t)$  est de 0 ou  $(1+t)t^{k-1}$ . On conclut par récurrence.  $\square$

En particulier, notons que si  $\mathfrak{M}(t)$  n'a pas de coefficients consécutifs non nuls, les deux polynômes sont égaux. On dit alors que la fonction est une fonction de Morse-Bott parfaite.

## Références

- [1] D.McDUFF, D.SALOMON *Introduction to symplectic topology, second edition* Oxford Mathematical Monographs, 1998
- [2] M.CARMO *Riemannian Geometry* Birkhäuser Boston, 1992
- [3] W.S.MASSEY *A basic course in algebraic topology* Springer Verlag, 1991
- [4] M.AUDIN *Topology of torus actions on symplectic manifolds* Birkhäuser Verlag, 1991
- [5] M.ATIYAH *Convexity and commuting hamiltonians* Bull. Lond. Math. Soc. 14 (1982), 1-15
- [6] T.MAINIERO *Les beaux buissons de Delzant : un tour de trois heure*
- [7] R.BOTT *Lectures on Morse theory old and new* Bulletin of the American Mathematical Society Volume 7, Number 2, September 1982