Solución del segundo parcial

2018-1 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1

a. Si las funciones p y q son continuas en I, entonces el conjunto $\mathcal{E}$ de soluciones con valores en $\mathbb{R}$ de la ecuación lineal homogénea $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ es un espacio vectorial real de dimensión 2: para todo $t_0 \in I$, la aplicación lineal

$$\Phi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

es un isomorfismo.

b. En efecto, si $y_1(t) = t^2$, entonces y_1 es de clase C^2 en $I :=]0; +\infty[$ y, para todo $t \in I$, $y_1'(t) - \frac{2}{t}y_1'(t) + \frac{2}{t^2}y_1(t) = 0$. Para hallar otra solución y_2, linealmente independiente de y_1, podemos aplicar el método de reducción del orden y buscar y_2 bajo la forma $y_2 = v(t)y_1(t)$ donde $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2. Entonces $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$. Inyectando esto en la ecuación y teniendo en cuenta la expresión de y_1, tenemos que $y_2'' - \frac{2}{t}y_2' + \frac{2}{t^2}y_2 = 0$ si y solamente si $t^2v'' + 2tv' = 0$, i.e. $v'' = -\frac{2}{t}v'$. Esto se cumple por ejemplo si $v(t) = \pm\frac{1}{t}$. La solución y_2 asociadad sería entonces $y_2(t) = \pm t$ y, en efecto, esa función es solución de la ecuación propuesta.

Como los coefiecientes de la ecuación lineal homogénea $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$ son continuos en el intervalo abierto $I =]0; +\infty[$, el espacio $\mathcal{E}$ de soluciones de esa ecuación es de dimensión 2 (por el teorema recordado en el punto **a**). Por lo tanto, la familia libre (y_1, y_2) es una base de $\mathcal{E}$: cualquier solución es de la forma

$$y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t$$

para un único par $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2

Se resuelve primero la ecuación lineal homogénea con coeficientes constante $y'' - 2y' + y = 0$, cuya ecuación característica $r^2 - 2r + 1 = 0$ tiene una raíz doble $r = 1$, por lo que la solución general de la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$ es $y_H(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 te^t$ con $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea $y''-2y'+y = e^{2t}+\cos t$, vamos a utilizar el método de los coeficientes indeterminados dos veces: primero para la ecuación $y'' - 2y' + y = e^{2t}$ y segundo para la ecuación $y'' - 2y' + y = \cos t$. En el primer caso, buscamos una solución que tenga la forma ke^{2t} con $k \in \mathbb{R}$: tal función es solución si y solamente si $4k - 4k + k = 1$, es decir $k = 1$. En el segundo caso, buscamos una solución bajo la forma $\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$: tal función es solución si y solamente si

$$(-\alpha \cos t - \beta \operatorname{sen} t) - 2(-\alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t) + (\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t) = \cos t,$$

es decir $-\alpha - 2\beta + \alpha = 1$ y $-\beta + 2\alpha + \beta = 0$. Y en efecto, la función $-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$ es solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = \cos t$. Por lo tanto, la función $y_P(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$ es solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = e^{2t} + \cos t$.

Entonces, por teorema, la solución general de la ecuación lineal no homogénea]$y'' - 2y' + y = e^{2t} + \cos t$ es

$$y_P(t) + y_H(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \lambda_1 e^t + \lambda_2 te^t$$

con $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si queremos ahora que se cumpla la condición de Cauchy $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, debemos escoger (λ_1, λ_2) de tal manera que $\lambda_1 + 1 = 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + 2 - \frac{1}{2} = 0$, es decir $\lambda_1 = -1$ y

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la solución del problema de Cauchy planteado en el enunciado es

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}te^t.$$

Ejercicio 3

La ecuación homogénea asociada a la ecuación $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$ es la misma del ejercicio anterior, así que buscaremos una solución de la ecuación no homogénea propuesta bajo la forma $y(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)te^t$ (donde (e^t, te^t) es la base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea anterior hallada en el Ejercicio 2). Calculando y' y y'' e inyectando esto en la ecuación no homogénea propuesta, el método de variación de los parámetros nos da el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2t}} \begin{pmatrix} e^t + te^t & -te^t \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

i.e. $u_1' = -\frac{t}{1+t^2}$ y $u_2' = \frac{1}{1+t^2}$. Basta entonces con poner, para todo $t \in \mathbb{R}$, $u_1(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ y $u_2(t) = \arctan t$ para obtener la solución particular

$$y(t) = -\frac{1}{2}\big(\ln(1+t^2)\big)e^t + (\arctan t)te^t$$

de la ecuación $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$.

Ejercicio 4

En efecto, si $y(t) = t$ o $y(t) = e^{-2t}$, se tiene, para todo $t \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$, que $(2t+1)y''(t) + 4ty'(t) - 4y(t) = 0$. Además, el wronskiano de esas dos soluciones es

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & e^{-2t} \\ 1 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2te^{-2t} - e^{-2t} = -e^{-2t}(2t+1)$$

el cual no se anula en $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. Ya que los coeficientes de la ecuación lineal homogénea de orden dos considerada son continuos en el intervalo abierto $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, la propiedad de no anulación del wronskiano demostrada anteriormente implica que la familia de soluciones (t, e^{-2t}) es una base del espacio de soluciones de esa ecuación.

Observación: Por un razonamiento análogo, la familia (t, e^{-2t}) es una base del espacio de soluciones de la ecuación

$$(2t+1)y'' + 4ty' - 4y = 0 \quad \left(t \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\right).$$

En cada uno de los dos intervalos $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ y $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, se aplica el teorema de Cauchy-Lipschitz para ecuaciones lineales homogéneas de la forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ *con p y q continuas en un intervalo abierto I* y tenemos existencia y unicidad de soluciones globales a cualquier probelma de Cauchy en I. Si consideramos la ecuación

$$(2t+1)y'' + 4ty' - 4y = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

entonces las hipótesis del teorema de Cauchy-Lipschitz no se cumplen (p y q no son continuas en todo $\mathbb{R}$). Sin embargo, el problema de Cauchy dado por esa ecuación junto a la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$ posee la función idénticamente nula como única solución global, pues, tal solución a ese problema de Cauchy tiene que ser de la forma

$$y(t) = \begin{cases} \lambda_1 t + \lambda_2 e^{-2t} & \text{si} \quad t < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad t \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

con (λ_1, λ_2) tales que

$$\left\{\begin{array}{ccc} (\lambda_1 t + \lambda_2 e^{-2t})|_{t=-\frac{1}{2}} & = & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}(\lambda_1 t + \lambda_2 e^{-2t})\right)|_{t=-\frac{1}{2}} & = & 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}(\lambda_1 t + \lambda_2 e^{-2t})\right)|_{t=-\frac{1}{2}} & = & 0 \end{array}\right.$$

(para que la función y así definida sea de clase C^2). Explícitamente,

$$\left\{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}\lambda_1 + e\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - 2e\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 4e\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ejercicio 5 (Bono)

La resolvente $R(t, t_0)$ de un sistema $Y' = A(t)Y$ con coeficientes continuos en un intervalo abierto I es solución del problema de Cauchy lineal

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{d}{dt}\big(R(t, t_0)\big) & = & A(t)R(t, t_0) \quad (t \in I) \\ R(t_0, t_0) & = & I_n \end{array}\right.$$

Si $A(t) = A$ es constante en I, entonces la función $M : t \longmapsto e^{(t-t_0)A}$ es solución del (mismo) problema de Cauchy lineal $\forall t \in I, M'(t) = AM(t)$ y $M(t_0) = e^0 = I_n$. Por unicidad de la solución a tal problema de Cauchy, podemos concluir que la resolvente de la ecuación $Y' = AY$ (con A constante) está dada, para todo $t \in I$, por la expresión $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$.