UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — ECUACIONES DIFERENCIALES

Parcial 2 (Duración: 1h20)

8 DE MARZO 2018 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, calculadoras o cualquier medio electrónico. Pueden utilizar sus apuntes de clase. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio 1

a. `(1 punto)` Sea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2, con coeficientes $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. ¿Bajo qué hipótesis podemos afirmar que el conjunto $\mathcal{E}$ de soluciones de esa ecuación es un espacio vectorial real de dimensión 2? Bajo esa hipótesis, dar (sin demostración) un isomorfismo explícito entre $\mathcal{E}$ y $\mathbb{R}^2$.

b. `(2 puntos)` Se considera la ecuación diferencial $y'' - \frac{2}{t}y = 0$, con $t \in]0; +\infty[$, y se observa que la función $y_1(t) = t^2$ es solución. Hallar otra solución y_2, linealmente independiente de y_1 y, a partir de eso, encontrar la solución general de la ecuación propuesta.

Ejercicio 2 `(3 puntos)`

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y &= e^{2t} + \cos t \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3 `(3 puntos)`

Utilizando el método de variación de los parámetros, hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ejercicio 4 `(1 punto)`

Se considera la ecuación lineal homogénea

$$(2t+1)y'' + 4ty' - 4y = 0 \quad \left(t \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\right). \tag{1}$$

Mostrar que la familia (t, e^{-2t}) es una base del espacio de soluciones de la ecuación (1).

Ejercicio 5 (Bono) `(1 punto)`

Sea $n \geq 1$ un entero y sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Se considera la ecuación diferencial con coeficientes constantes $Y' = AY$, donde $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ es una matriz y $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función. Sea $t_0 \in I$ un punto arbitrario. Mostrar que la resolvente $R(t, t_0)$ de la ecuación anterior es la matriz $e^{(t-t_0)A}$.