Solución del primer parcial

2018-1 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1

Se considera la ecuación diferencial $y' = t - y^2$, con $t \in \mathbb{R}$.

a. *Hallar todos los puntos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ en los cuales una curva integral de la ecuación $y' = t - y^2$ tiene una tangente horizontal y dibujar la curva así definida.*

Los puntos (t, y) en los cuales una curva integral $t \longmapsto (t, \varphi(t))$ tiene una tangente horizontal son los puntos $(t, \varphi(t))$ tales que $(1, \varphi'(t)) = (1, 0)$, es decir los puntos (t, y) tales que $t - y^2 = 0$: es la ecuación implícita de una parábola en el plano de coordenadas (t, y). Para dibujarla, se puede utilizar la parametrización $(t, \pm\sqrt{t})$.

b. *Supongamos que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación $y' = t - y^2$ para la cual existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(t_0) = 0$. Mostrar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)$.*

Nótese que la curva de ecuación $t - y^2 = 0$ separa el plano en tres sub-conjuntos: la curva misma $\Gamma_0 := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t - y^2 = 0\}$ y las regiones

$$U_0^+ := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t - y^2 > 0\} \quad \text{y} \quad U_0^- := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t - y^2 < 0\}.$$

Sea (t_0, y_0) un punto de la curva Γ_0. La tangente a esa curva en el punto (t_0, y_0) es la recta de ecuación $(t - t_0) - 2y_0(y - y_0) = 0$. En particular, esa tangente nunca coincide con la recta de ecuación $y = y_0$ (la tangente horizontal a la curva integral $t \longmapsto (t, \varphi(t))$). Además, la curva tangente a Γ_0 en (t_0, y_0) está contenida en U_0^-. Entonces lo anterior implica que $(t, \varphi(t)) \in U_0^-$ si $t < t_0$ y que $(t, \varphi(t)) \in U_0^+$ si $t > t_0$ (se puede mostrar, por ejemplo, que, si $y_0 \neq 0$, el signo de $\varphi(t) - (\pm\sqrt{t})$ coincide con el de $\frac{1}{2y_0}(t - t_0)$ en una vecindad de t_0). Ya que $\varphi'(t) = t - \varphi(t)^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo anterior implica que φ es estrictamente decreciente en $] - \infty; t_0[$ y estrictamente creciente en $]t_0; +\infty[$. En particular, φ tiene un mínimo estricto en t_0: para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)$ con igualdad si y solamente si $t = t_0$.

Ejercicio 2

Se considera la ecuación diferencial $y' = ay$ con $a < 0$. Mostrar que la función constante igual a 0 es una solución asintóticamente estable de esa ecuación.

Las soluciones de la ecuación $y' = ay$ son las funciones $y_c(t) = ce^{at}$ con $c \in \mathbb{R}$. En particular, la solución nula corresponde a $c = 0$. Se tiene, para todo $c \in \mathbb{R}$ que $|y_c(t) - y_0(t)| = |ce^{at} - 0| = e^{at}|c - 0| = e^{at}|y_c(0) - y_0(0)|$. Ya que $a < 0$ (por hipótesis), se tiene $\lim_{t\to+\infty} e^{at} = 0$. Entonces lo anterior muestra que y_0 es una solución asintóticamente estable de la ecuación $y' = ay$ cuando $a < 0$. De hecho, todas las soluciones de esa ecuación son asintóticamente estables cuando $a < 0$.

Ejercicio 3

Mostrar que existe una cantidad infinita de soluciones al problema de Cauchy

$$(\text{E}) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 3y^{2/3} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Sea $c_1 < 0$ y $c_2 > 0$ dos constantes. La función

$$y_{c_1,c_2}(t) = \begin{cases} (t-c_1)^3 & \text{si } t < c_1 \\ 0 & \text{si } c_1 \le t \le c_2 \\ (t-c_2)^3 & \text{si } t > c_2 \end{cases}$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y se tiene

$$y'_{c_1,c_2}(t) = \begin{cases} 3(t-c_1)^2 & \text{si } t < c_1 \\ 0 & \text{si } c_1 \le t \le c_2 \\ 3(t-c_2)^2 & \text{si } t > c_2 \end{cases}$$

de tal manera que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $y'_{c_1,c_2}(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}$, así que hemos hallado una cantidad infinita de soluciones de la ecuación $y' = 3y^{2/3}$. Además, todas cumplen con la condición de Cauchy $y(0) = 0$.

Bono: ¿Por qué este ejemplo no contradice el enunciado de unicidad en el teorema de Cauchy-Lipschitz?

Este ejemplo no contradice la unicidad en el teorema de Cauchy-Lipschitz (unicidad de soluciones maximales a un problema de Cauchy) porque la función $g(y) = 3y^{2/3}$ no es lipschitziana en o: se tiene, para todo $y \neq 0$,

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \frac{3}{\sqrt[3]{y}}$$

y esta cantidad es no acotada en cualquier vecindad de 0. Nótese que g sí es localmente lipschitziana en los intervalos $]-\infty; 0[$ y $]0; +\infty[$. En particular, el teorema de Cauchy-Lipschitz sí aplica en cada uno de esos intervalos. La solución y_{c_1,c_2} que construimos arriba fue obtenida al pegar soluciones locales de la ecuación $y' = 3y^{2/3}$, convenientemente extendidas.

Ejercicio 4

Se considera el siguiente modelo depredador-presa de Lotka y Volterra

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x' &= 3xy - 4x \\ y' &= y - 2xy \end{cases}$$

Sea f la función $(x, y) \longmapsto 2x - \ln(x) + 3y - 4\ln(y)$. Mostrar que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es solución del sistema (S) en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, entonces la función $f \circ \varphi$ es constante en J.

La función $f \circ \varphi$ es derivable en el intervalo J (el intervalo de definición de φ) y, por la regla de la cadena, se tiene, para todo $t \in J$,

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) \\ &= \left(2 - \frac{1}{x(t)}\right)\big(3x(t)y(t) - 4y(t)\big) + \left(3 - \frac{4}{y(t)}\right)\big(y(t) - 2x(t)y(t)\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $f \circ \varphi$ es constante en el intervalo J.

Bono: En el sistema (S), ¿cuál variable (x o y) es la que representa la cantidad de individuos de la especie presa? Justificar la respuesta.

La ecuación $y' = y - 2xy$ muestra que si $x = 0$ entonces y crece, y que si $x > 0$ eso afecta negativamente el crecimiento de la población representada por la variable y. Por lo tanto, y representa la cantidad de individuos de la especie presa en este modelo.