Parcial 1 (Duración: 1h20)

13 de febrero 2018 | Florent Schaffhauser

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Ejercicio 1 `(2 puntos)`

Se considera la ecuación diferencial $y' = t - y^2$, con $t \in \mathbb{R}$.

a. `(1 punto)` Hallar todos los puntos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ en los cuales una curva integral de la ecuación $y' = t - y^2$ tiene una tangente horizontal y dibujar la curva así definida.

b. `(1 punto)` Supongamos que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación $y' = t - y^2$ para la cual existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(t_0) = 0$. Mostrar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)$.

Ejercicio 2 `(1 punto)`

Se considera la ecuación diferencial $y' = ay$ con $a < 0$. Mostrar que la función constante igual a 0 es una solución asintóticamente estable de esa ecuación.

Ejercicio 3 `(1 punto)`

Mostrar que existe una cantidad infinita de soluciones al problema de Cauchy

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 3y^{2/3} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Bono: `(0.5 punto)` ¿Por qué este ejemplo no contradice el enunciado de unicidad en el teorema de Cauchy-Lipschitz?

Ejercicio 4 `(1 punto)`

Se considera el siguiente modelo depredador-presa de Lotka y Volterra

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3xy - 4x \\ y' & = & y - 2xy \end{array} \right.$$

Sea f la función $(x, y) \longmapsto 2x - \ln(x) + 3y - 4\ln(y)$. Mostrar que si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es solución del sistema (S) en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, entonces la función $f \circ \varphi$ es constante en J.

Bono: `(0.5 punto)` En el sistema (S), ¿cuál variable (x o y) es la que representa la cantidad de individuos de la especie presa? Justificar la respuesta.