Solución de la tarea

2017-2 Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. a. Para mostrar que $\widetilde{G_0}$ (resp. G_0) es un sub-grupo de G, consideremos la aplicación continua $G \times G \longrightarrow G$ que envía un par (g_1, g_2) a $g_1^{-1}g_2$. Entonces la imagen de $\widetilde{G_0} \times \widetilde{G_0}$ (resp. $G_0 \times G_0$) por esa aplicación es conexa (resp. arco-conexa) y contiene e (como imagen de (e, e)), por lo que está contenida en $\widetilde{G_0}$ (resp. G_0). Eso muestra que $\widetilde{G_0}$ (resp. G_0) es un sub-grupo de G.

Para mostrar que es un sub-grupo normal, sea $g \in G$ y consideremos la aplicación continua $G \longrightarrow G$ que envía h a ghg^{-1}. Entonces la imagen de $\widetilde{G_0} \times \widetilde{G_0}$ (resp. $G_0 \times G_0$) por esa aplicación es conexa (resp. arco-conexa) y contiene e (como imagen de e), por lo que está contenida en $\widetilde{G_0}$ (resp. G_0). Eso muestra que $g\widetilde{G_0}$ (resp. G_0) es un sub-grupo normal de G.

b. $G/\widetilde{G_0}$ (resp. G/G_0) es el conjunto de clases a la derecha módulo $\widetilde{G_0}$ (resp. módulo G_0) en G. Para mostrar que $G/\widetilde{G_0} = \widetilde{\pi_0}(G)$ (resp. que $G/G_0 = \pi_0(G)$), es suficiente mostrar que dos elementos g_1, g_2 de G pertenecen a la misma componente conexa (resp. arco-conexa) de G si y solamente si $g_1^{-1}g_2 \in \widetilde{G_0}$ (resp. $g_1^{-1}g_2 \in G_0$). Supongamos primero que g_1 y g_2 pertenecen a una misma componente conexa C de G. Entonces $g_1^{-1}C = \widetilde{G_0}$, pues $g^{-1}C$ es la imagen de una componente conexa por un homeomorfismo de G entonces es una componente conexa de G, y además contiene $e = g_1^{-1}g_1$. De la misma manera $g_2^{-1}C = \widetilde{G_0}$. Luego $g_1\widetilde{G_0} = C = g_2\widetilde{G_0}$ y $g_1^{-1}g_2 \in \widetilde{G_0}$. La demostración es la misma si C es una componente arco-conexa, pues un homeomorfismo de G permuta sus componentes arco-conexas. Supongamos ahora que $g_1^{-1}g_2 \in G_0$. Entonces $g_2 \in g_1\widetilde{G_0}$, la cual es la componente conexa de g_1. Otra vez la demostración es la misma si $g_1^{-1}g_2 \in G_0$, pues g_1G_0 es la componente arco-conexa de g_1 en G.

Nótese que es posible demostrar directamente que si G es un grupo topológico, $\widetilde{\pi_0}(G)$ (resp. $\pi_0(G)$) tiene estructura de grupo: se pone $[g_1][g_2] := [g_1g_2]$ y esto está bien definido pues si $[g_1'] = [g_1]$ y $[g_2'] = [g_2]$ entonces $[g_1g_2] = g_1[g_2]$, pues $g_1[g_2]$ es una componente conexa (resp. arco-conexa) de G y contiene g_1g_2, luego $[g_1g_2] = g_1[g_2] = g_1[g_2'] = [g_1g_2']$ y de la misma manera $[g_1g_2'] = [g_1]g_2' = [g_1']g_2' = [g_1'g_2']$, por lo que $[g_1g_2] = [g_1'g_2']$.

Ejercicio 2. a. Para mostrar que f_*^Y es continua, es suficiente mostrar que, para todo compacto $K \subset Y$ y todo abierto $U \subset X_2$, la pre-imagen por f_*^Y del abierto (sub-)básico

$$W_{Y,X_2}(K,U) := \{\varphi \in \mathcal{C}(Y;X_2) \mid \varphi(K) \subset U\}$$

de $\mathcal{C}(Y;X_2)$ es un abierto de $\mathcal{C}(Y;X_1)$. Se tiene

$$\begin{array}{rcl} (f_*^Y)^{-1}(W_{Y,X_2}(K,U)) & = & \{\varphi \in \mathcal{C}(Y;X_1) \mid f\circ\varphi \in W_{Y,X_2}(K,U)\} \\ & = & \{\varphi \in \mathcal{C}(Y;X_1) \mid \underbrace{(f\circ\varphi)(K) \subset U}_{\varphi(K)\subset f^{-1}(U)}\} \\ & = & W_{Y,X_1}(K, f^{-1}(U)) \end{array}$$

con $f^{-1}(U)$ abierto en X_1 porque $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es continua. Como $W_{Y,X_1}(K, f^{-1}(U))$ es abierto en $\mathcal{C}(Y;X_1)$, hemos demostrado que f_*^Y es continua.

De forma análoga, en el otro ejercicio, para mostrar que f_Y^* es continua, se muestra que $(f_Y^*)^{-1}(W_{X_1,Y}(K,U)) = W_{X_2,Y}(f(K),U)$ con $f(K)$ compacto porque f es continua.

b. Recordemos que $(g\circ f) \sim \mathrm{id}_{X_1}$ por hipótesis y sea $H : I \times X_1 \longrightarrow X_1$ una homotopía entre las dos. Queremos definir una homotopía H^Y entre $g_*^Y \circ f_*^Y = (g\circ f)_*^Y$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}$. Pongamos

$$H^Y : \begin{array}{ccc} I \times \mathcal{C}(Y;X_1) & \longrightarrow & \mathcal{C}(Y;X_1) \\ (t,\varphi) & \longmapsto & H(t,\varphi(\,\cdot\,)) \end{array}$$

y mostremos que H^Y es continua. Esto será suficiente pues, de resto, tenemos

$$H^Y(0,\varphi) = H(0,\varphi(\,\cdot\,)) = (g\circ f)\circ\varphi = (g\circ f)_*^Y(\varphi) = (g_*^Y\circ f_*^Y)(\varphi)$$

y $H^Y(1,\varphi) = H(1,\varphi(\,\cdot\,)) = \mathrm{id}_{X_1}\circ\varphi = \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}(\varphi)$. Para mostrar que H^Y es continua, es suficiente mostrar que, para todo compacto $K\subset Y$ y todo abierto $U\subset X_1$, se tiene que $(H^Y)^{-1}(W_{Y,X_1}(K,U))$ es abierto en $I\times\mathcal{C}(Y;X_1)$. Para ello, vamos a mostrar que $(H^Y)^{-1}(W_{Y,X_1}(K,U))$ es una vecindad de todos sus puntos.

Sea entonces $(t_0,\varphi_0)\in(H^Y)^{-1}(W_{Y,X_1}(K,U))$, es decir que $H^Y(t_0,\varphi_0)\in W_{Y,X_1}(K,U)$, lo cual es equivalente a $H^Y(t_0,\varphi_0)(K)\subset U$, es decir $H(\{t_0\}\times\varphi_0(K))\subset U$. Ya que U es abierto en X_1 y $H: I\times X_1\longrightarrow X_1$ es continua, tenemos: para todo $y\in K$, existe $\varepsilon_y>0$ y un abierto $V_{\varphi_0(y)}$ de X_1 que contiene $\varphi_0(y)$ tales que

$$H(]t_0-\varepsilon_y;t_0+\varepsilon_y[\times V_{\varphi_0(y)})\subset U.$$

Esto define un cubrimiento abierto $(V_{\varphi_0(y)})_{y\in K}$ del compacto $\varphi_0(K)$ de X_1. Se extrae un sub-cubrimiento finito $(V_{\varphi_0(y_i)})_{1\le i\le n}$ y se pone $\varepsilon:=\min_{1\le i\le n}\varepsilon_{\varphi_0(y_i)}$. Entonces $\varepsilon>0$ y

$$H(]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[\times\cup_{i=1}^n V_{\varphi_0(y_i)})\subset U.$$

Consideremos entonces el abierto

$$\Omega_{(t_0,\varphi_0)} :=]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[\times W_{Y,X_1}(K,\cup_{i=1}^n V_{\varphi_0(y_i)})$$

en $I\times\mathcal{C}(Y;X_1)$. Entonces $(t_0,\varphi_0)\in\Omega_{(t_0,\varphi_0)}$, pues $\varphi_0(K)\subset\cup_{i=1}^n V_{\varphi_0(y_i)}$ por definición de los $(V_{\varphi_0(y_i)})_{1\le i\le n}$. Además, si $(t,\varphi)\in\Omega_{(t_0,\varphi_0)}$, entonces

$$H^Y(t,\varphi) = H(\{t\}\times\varphi(K))\subset H(]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[\times\cup_{i=1}^n V_{\varphi_0(y_i)})\subset U,$$

pues $t\in]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[$ y $\varphi\in W_{Y,X_1}(K,\cup_{i=1}^n V_{\varphi_0(y_i)})$. Luego,

$$(t_0,\varphi_0)\in\Omega_{(t_0,\varphi_0)}\subset(H^Y)^{-1}(W_{Y,X_1}(K,U)),$$

lo cual termina la demostración.

De forma análoga, para el otro ejercicio, si $H: I\times X_1\longrightarrow X_1$ es una homotopía entre $(g\circ f)$ e id_{X_1}, entonces la aplicación

$$H_Y:\begin{array}{ccc} I\times\mathcal{C}(X_1;Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X_1;Y)\\ (t,\varphi) & \longmapsto & \varphi\circ H(t,\,\cdot\,)\end{array}$$

es una homotopía entre $f_Y^*\circ g_Y^* = (g\circ f)_Y^*$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_1;Y)}$. En efecto, se tiene

$$H_Y(0,\varphi) = \varphi\circ H(0,\,\cdot\,) = \varphi\circ(g\circ f) = (g\circ f)_Y^*(\varphi) = (f_Y^*\circ g_Y^*)(\varphi)$$

y $H_Y(1,\varphi) = \varphi\circ H(1,\,\cdot\,) = \varphi\circ\mathrm{id}_{X_Y} = \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_1;Y)}(\varphi)$. Para mostrar que H_Y es continua, es suficiente mostrar que, para todo compacto $K\subset X_1$ y todo abierto $U\subset Y$, se tiene que $(H_Y)^{-1}(W_{X_1,Y}(K,U))$ es abierto en $I\times\mathcal{C}(X_1;Y)$. Para ello, vamos a mostrar que $(H_Y)^{-1}(W_{X_1,Y}(K,U))$ es una vecindad de todos sus puntos.

Sea entonces $(t_0,\varphi_0)\in(H_Y)^{-1}(W_{X_1,Y}(K,U))$, es decir que $H_Y(t_0,\varphi_0)\in W_{X_1,Y}(K,U)$, lo cual es equivalente a $\varphi_0\circ H_Y(\{t_0\}\times K)\subset U$, es decir $H(\{t_0\}\times K)\subset\varphi_0^{-1}(U)$. Ya que $\varphi_0: X_1\longrightarrow Y$ es continua y U es abierto en Y, tenemos $\varphi_0^{-1}(U)$ abierto en X_1 y, para todo $x\in K$, $H(t_0,x)\in\varphi_0^{-1}(U)$. Como H es continua, tenemos que, para todo $x\in K$, existe $\varepsilon_x>0$ y una vecindad abierta V_x de x en X_1 tales que

$$H(]t_0-\varepsilon_x;t_0+\varepsilon_x[\times V_x)\subset\varphi_0^{-1}(U).$$

Esto define un cubrimiento abierto $(V_x)_{x\in K}$ del compacto K de X_1. Se extrae un sub-cubrimiento finito $(V_{x_i})_{1\le i\le n}$ y se pone $\varepsilon:=\min_{1\le i\le n}\varepsilon_{x_i}$. Entonces $\varepsilon>0$ y

$$H(]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[\times K)\subset H(]t_0-\varepsilon;t_0+\varepsilon[\times\cup_{i=1}^n V_{x_i})\subset\varphi_0^{-1}(U).$$

Consideremos entonces el compacto

$$K' := H\left(\left[t_0-\frac{\varepsilon}{2};t_0+\frac{\varepsilon}{2}\right]\times K\right)$$

de X_1, de tal manera que $H(\{t_0\}\times K)\subset K'\subset\varphi_0^{-1}(U)$, y el abierto

$$\Omega_{(t_0,\varphi_0)} := \left]t_0-\frac{\varepsilon}{2};t_0+\frac{\varepsilon}{2}\right[\times W_{X_1,Y}(K',U)$$

en $I \times \mathcal{C}(X_1;Y)$. Entonces, $(t_0,\varphi_0) \in \Omega_{(t_0,\varphi_0)}$, pues $K' \subset \varphi_0^{-1}(U)$ por definición de K'. Además, si $(t,\varphi) \in \Omega_{(t_0,\varphi_0)}$, entonces

$$H_Y(t,\varphi)(K) = (\varphi \circ H)(\{t\} \times K) \subset \varphi(K') \subset U,$$

pues $t \in [t_0 - \frac{\varepsilon}{2}; t_0 + \frac{\varepsilon}{2}]$, por lo que $H(\{t\} \times K) \subset K'$, y $\varphi \in W_{X_1,Y}(K',U)$. Luego,

$$(t_0,\varphi_0) \in \Omega_{(t_0,\varphi_0)} \subset (H_Y)^{-1}(W_{X_1,Y}(K,U)),$$

lo cual termina la demostración. Notemos que, en este caso (el ejercicio de la columna derecha), se utilizó la compacidad local de I.

c. Por la pregunta **a**, las aplicaciones f_*^Y y g_*^Y (resp. f_Y^* y g_Y^*) ambas son continuas. Y por la pregunta **b**, $(g_*^Y \circ f_*^Y) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}$ (resp. $(f_Y^* \circ d_Y^*) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_1;Y)}$). De manera similar, $(f_*^Y \circ g_*^Y) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_2)}$ (resp. $(g_Y^* \circ f_Y^*) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_2;Y)}$). Por lo tanto, f_*^Y (resp. f_Y^*) es una equivalencia de homotopía entre $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$ (resp. $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$).

———— *FIN DE LA CORRECCIÓN DE LA TAREA* ————

Afirmación: Si nos restringimos a espacios topológicos *localmente compactos* y si $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$ tienen el mismo tipo de homotopía (o si $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$ tienen el mismo tipo de homotopía) *para todo Y y eso de manera natural en Y*, entonces X_1 y X_2 tienen el mismo tipo de homotopía.

Demostremos esa afirmación, por ejemplo en el caso[1] donde $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$ tienen el mismo tipo de homotopía para todo Y, de manera natural en Y. Eso significa dos cosas: primero, para todo espacio Y, existe una aplicación continua $F^Y : \mathcal{C}(Y;X_1) \longrightarrow \mathcal{C}(Y;X_2)$ y una aplicación continua $G^Y : \mathcal{C}(Y;X_2) \longrightarrow \mathcal{C}(Y;X_1)$ tales que $(G^Y \circ F^Y) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}$ y $(F^Y \circ G^Y) \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_2)}$, y segundo (decir que esas aplicaciones son *naturales en Y* significa que) si $h : Y \longrightarrow Y'$ es una aplicación continua, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(Y';X_1) \arrow[r, "F^{Y'}"] \arrow[d, "h^*_{X_1}"] & \mathcal{C}(Y';X_2) \arrow[d, "h^*_{X_2}"] \\
\mathcal{C}(Y;X_1) \arrow[r, "F^Y"] & \mathcal{C}(Y;X_2)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Notemos que naturalidad en ese sentido en efecto ocurre si, como en el marco del ejercicio **2**, existe una aplicación continua $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que, para todo Y, $F^Y = f_*^Y$. En efecto, en tal caso, se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{C}(Y';X_1)$,

$$\begin{aligned}
& (f_*^Y \circ h^*_{X_1})(\varphi) = f_*^Y(h^*_{X_1}(\varphi)) = f_*^Y(\varphi \circ h) = f \circ (\varphi \circ h) \\
= \quad & (f \circ \varphi) \circ h = h^*_{X_2}(f \circ \varphi) = h^*_{X_2}(f_*^{Y'}(\varphi)) = (h^*_{X_2} \circ f_*^{Y'})(\varphi).
\end{aligned}$$

Y la *observación clave* es que, en particular, en este caso se tiene que

$$f = f \circ \mathrm{id}_{X_1} = f_*^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1}) = F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1}). \tag{2}$$

Ahora queremos mostrar que, recíprocamente, si existen aplicaciones

$$F^Y : \mathcal{C}(Y;X_1) \longrightarrow \mathcal{C}(Y;X_2) \quad \text{y} \quad G^Y : \mathcal{C}(Y;X_2) \longrightarrow \mathcal{C}(Y;X_1)$$

naturales en Y y tales que $G^Y \circ F^Y \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}$ y $F^Y \circ G^Y \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_2)}$, entonces existe una equivalencia de homotopía $f : X_1 \longrightarrow X_2$.

Basado en la observación clave (2), la idea es *definir*

$$f := F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1}) \quad \text{y} \quad g := G^{X_2}(\mathrm{id}_{X_2}).$$

[1]El caso donde $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$ tienen el mismo tipo de homotopía es completamente similar, como se podrá verificar a manera de ejercicio.

Entonces, si ponemos $Y := X_2$, $Y' := X_1$ y $h := (g : X_2 \longrightarrow X_1)$ en el Diagrama (1), obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X_1;X_1) \arrow[r, "F^{X_1}"] \arrow[d, "g^*_{X_1}"] & \mathcal{C}(X_1;X_2) \arrow[d, "g^*_{X_2}"] \\ \mathcal{C}(X_2;X_1) \arrow[r, "F^{X_2}"] & \mathcal{C}(X_2;X_2) \end{tikzcd}$$

En particular, $(g^*_{X_2} \circ F_{X_1})(\mathrm{id}_{X_1}) = (F_{X_2} \circ g^*_{X_1})(\mathrm{id}_{X_1})$. Pero $(g^*_{X_2} \circ F_{X_1})(\mathrm{id}_{X_1}) = g^*_{X_2}(f) = f \circ g$ y $(F_{X_2} \circ g^*_{X_1})(\mathrm{id}_{X_1}) = F^{X_2}(g) = (F^{X_2} \circ G^{X_2})(\mathrm{id}_{X_2})$. Luego $(F^{X_2} \circ G^{X_2})(\mathrm{id}_{X_2}) = f \circ g$.

Sea entonces $H^{X_2} : I \times \mathcal{C}(X_2;X_2) \longrightarrow \mathcal{C}(X_2;X_2)$ una homotopía entre $F^{X_2} \circ G^{X_2}$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_2;X_2)}$ y pongamos

$$H : \begin{array}{ccc} I \times X_2 & \longrightarrow & X_2 \\ (t,x) & \longmapsto & H^{X_2}(t, \mathrm{id}_{X_2})(x) \end{array}$$

Entonces H es continua, pues es la compuesta

$$\begin{array}{ccccccc} I \times X_2 & \longrightarrow & I \times \mathcal{C}(X_2;X_2) \times X_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X_2;X_2) \times X_2 & \longrightarrow & X_2 \\ (t,x) & \longmapsto & (t, \mathrm{id}_{X_2}, x) & \longmapsto & (H^{X_2}(t, \mathrm{id}_{X_2}), x) & \longmapsto & H^{X_2}(t, \mathrm{id}_{X_2})(x) \end{array}$$

donde la última aplicación (la de "evaluación") es continua *si X_2 es localmente compacto* (como lo vimos en clase), con

$$H(0,x) = H^{X_2}(0, \mathrm{id}_{X_2})(x) = \big((F^{X_2} \circ G^{X_2})(\mathrm{id}_{X_2})\big)(x) = (f \circ g)(x)$$

y

$$H(1,x) = H^{X_2}(1, \mathrm{id}_{X_2})(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_2;X_2)}(\mathrm{id}_{X_2})\big)(x) = \mathrm{id}_{X_2}(x),$$

por lo que H es una homotopía entre $f \circ g$ e id_{X_2}.

De manera similar, se demuestra que $g \circ f \sim \mathrm{id}_{X_1}$. Por lo tanto, tenemos que $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es una equivalencia de homotopía.

Para profundizar: En trasfondo en la demostración anterior está la noción de funtor representable y el lema de Yoneda. Más precisamente, si consideramos la categoría C cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las clases de homotopía de aplicaciones continuas, entonces el funtor

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(C^{\mathrm{op}}; \mathrm{Sets}) \\ X & \longmapsto & \pi(\,\cdot\,;X) := \mathcal{C}(\,\cdot\,;X)/\sim \end{array}$$

(donde $\sim$ es la relación de homotopía) es *plenamente fiel*[2] y, en particular, dado dos espacios X_1 y X_2, si los funtores $\pi(\,\cdot\,;X_1)$ y $\pi(\,\cdot\,;X_2)$ son naturalmente equivalentes en $C^\vee$, entonces X_1 y X_2 son isomorfos en C (es decir, acá, que tienen el mismo tipo de homotopía). En efecto, lo anterior es consecuencia de los siguientes dos enunciados, que son puramente categóricos:

(1) El ***lema de Yoneda***: Si C es una categoría, el funtor (covariante)

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(C^{\mathrm{op}}; \mathrm{Sets}) \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_C(\,\cdot\,;X) \end{array} \tag{3}$$

es plenamente fiel.

(2) Si X y X' son dos objetos de C tales que $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,;X) \simeq \mathrm{Hom}(\,\cdot\,;X')$ en $C^\vee$, entonces $X \simeq X'$ en C.

Demostremos esos dos enunciados.

(1) Sean X_1 y X_2 dos objetos en C y sea $F^Y : \mathrm{Hom}_C(Y;X_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(Y;X_2)$ una familia de aplicaciones, naturales en Y. Queremos mostrar que existe un único $f \in \mathrm{Hom}_C(X_1;X_2)$ tal que, para todo objeto Y, $F^Y = f^Y_*$. Si en efecto existe tal f, entonces en particular $f = f \circ \mathrm{id}_{X_1} = f^{X_1}_*(\mathrm{id}_{X_1}) = F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1})$, lo cual muestra la unicidad. Para mostrar la

[2]Es decir que, para toda transformación natural $F^{\cdot} : \pi(\,\cdot\,;X_1) \longrightarrow \pi(\,\cdot\,;X_2)$, existe un único morfismo $f : X_1 \longrightarrow X_2$ en C tal que, para todo espacio topológico Y, $F^Y = f^Y_*$.

existencia, definamos $f := F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1}) \in \mathrm{Hom}_C(X_1; X_2)$. Entonces, para todo objeto Y de C y todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(Y; X_1)$, se tiene, por naturalidad de los F^Y, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(X_1;X_1) \arrow[r, "F^{X_1}"] \arrow[d, "\varphi^*_{X_1}"] & \mathrm{Hom}_C(X_1;X_2) \arrow[d, "\varphi^*_{X_2}"] \\ \mathrm{Hom}_C(Y;X_1) \arrow[r, "F^Y"] & \mathrm{Hom}_C(Y;X_2) \end{tikzcd}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} & (f_*^Y)(\varphi) = f \circ \varphi = F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1}) \circ \varphi = \varphi^*_{X_2}(F^{X_1}(\mathrm{id}_{X_1})) = (\varphi^*_{X_2} \circ F^{X_1})(\mathrm{id}_{X_1}) \\ = \; & (F^Y \circ \varphi^*_{X_1})(\mathrm{id}_{X_1}) = F^Y(\varphi^*_{X_1}(\mathrm{id}_{X_1})) = F^Y(\mathrm{id}_{X_1} \circ \varphi) = F^Y(\varphi), \end{aligned}$$

es decir que $f_*^Y = F^Y$, lo cual muestra la existencia y termina la demostración del lema de Yoneda.
(2) Es una consecuencia de (1): si $F^Y : \mathrm{Hom}_C(Y; X_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(Y; X_2)$ es una familia de aplicaciones, naturales en Y, para la cual existe una familia $G^Y : \mathrm{Hom}_C(Y; X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(Y; X_1)$, también natural en Y, tal que $G^Y \circ F^Y = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_C(Y;X_1)}$ y $F^Y \circ G^Y = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_C(Y;X_2)}$, entonces, por el lema de Yoneda existe un (único) $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que, para todo Y, $F^Y = f_*^Y$, y un (único) $g : X_2 \longrightarrow X_1$ tal que, para todo Y, $G^Y = g_*^Y$. En particular,

$$\begin{aligned} & f \circ g = (f \circ g) \circ \mathrm{id}_{X_2} = (f \circ g)_*^{X_2}(\mathrm{id}_{X_2}) = (f_*^{X_2} \circ g_*^{X_2})(\mathrm{id}_{X_2}) \\ = \; & (F^{X_2} \circ G^{X_2})(\mathrm{id}_{X_2}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_C(X_2;X_2)}(\mathrm{id}_{X_2}) = \mathrm{id}_{X_2}. \end{aligned}$$

y, de la misma manera, $g \circ f = \mathrm{id}_{X_1}$ (se puede observar que no se utilizó la unicidad de los morfismos f y g, pues ésa de todas maneras es consecuencia de su existencia, como lo vimos en (2)).

A manera de aplicación, se puede concluir que, dado dos espacios topológicos X_1 y X_2, las siguientes tres propiedades son equivalentes:

(1) X_1 y X_2 tienen el mismo tipo de homotopía.
(2) Los funtores $\pi(\,\cdot\,; X_1)$ y $\pi(\,\cdot\,; X_2)$ son naturalmente equivalentes.
(3) Los funtores $\pi(X_1;\,\cdot\,)$ y $\pi(X_2;\,\cdot\,)$ son naturalmente equivalentes.

En efecto, la equivalencia de (1) y (2) es consecuencia del lema de Yoneda (como lo vimos arriba) y la equivalencia de (1) y (3) también es consecuencia del lema de Yoneda, cuando uno lo aplica a la categoría C^{op}: en ese caso, el *encaje de Yoneda* (3) es el funtor (aún covariante)

$$\begin{array}{ccc} C^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & (C^{\mathrm{op}})^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}((C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}; \mathrm{Sets}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(C; \mathrm{Sets}) \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(\,\cdot\,; X) = \mathrm{Hom}_C(X;\,\cdot\,) \end{array}$$