Universidad de Los Andes — Topología algebraica

Tarea - Para entregar el 05/09

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. `(4 puntos)` Sea G un grupo topológico. Sea $\widetilde{G_0}$ la componente neutra de G (es decir, la componente conexa del elemento neutro $e \in G$) y sea G_0 la componente arco-conexa del elemento neutro $e \in G$).
a. Mostrar que $\widetilde{G_0}$ y G_0 son sub-grupo normales de G.
b. Mostrar que $G/\widetilde{G_0}$ es el conjunto de componentes conexas de G (que en clase denotamos $\widetilde{\pi_0}(G)$) y que G/G_0 es el conjunto de componentes arco-conexas de G (que en clase denotamos $\pi_0(G)$).

Observación: En particular, el el $\widetilde{\pi}_0$ y el π_0 de un grupo topológico tienen estructura de grupo canónica (eso no es cierto para el π_0 de un espacio topológico cualquiera).

Ejercicio 2. `(6 puntos)` Resolver ***uno solo*** de los siguientes dos ejercicios.

Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una equivalencia de homotopía entre dos espacios topológicos X_1 y X_2 y sea $g : X_2 \longrightarrow X_1$ un inverso salvo homotopía de f. Sea Y un espacio topológico. Se les provee la topología de la convergencia compacta a los conjuntos de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$. Sea

$$f_*^Y : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y;X_1) & \longrightarrow & \mathcal{C}(Y;X_2) \\ \varphi & \longmapsto & f\circ\varphi \end{array}$$

la aplicación inducida por f entre esos espacios.
a. Mostrar que f_*^Y es continua.
b. Utilizando que $(g\circ f)_*^Y = g_*^Y \circ f_*^Y$, mostrar que $g_*^Y \circ f_*^Y$ es homótopa a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(Y;X_1)}$.
c. Mostrar que $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$ tienen el mismo tipo de homotopía.

Sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una equivalencia de homotopía entre dos espacios topológicos X_1 y X_2 y sea $g : X_2 \longrightarrow X_1$ un inverso salvo homotopía de f. Sea Y un espacio topológico. Se les provee la topología de la convergencia compacta a los conjuntos de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$. Sea

$$f_Y^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X_2;Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X_1;Y) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi\circ f \end{array}$$

la aplicación inducida por f entre esos espacios.
a. Mostrar que f_Y^* es continua.
b. Utilizando que $(g\circ f)_Y^* = f_Y^* \circ g_Y^*$, mostrar que $f_Y^* \circ g_Y^*$ es homótopa a $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X_1;Y)}$.
c. Mostrar que $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$ tienen el mismo tipo de homotopía.

Observación: Resulta que, si nos restringimos a espacios topológicos localmente compactos y si $\mathcal{C}(Y;X_1)$ y $\mathcal{C}(Y;X_2)$ tienen el mismo tipo de homotopía (o si $\mathcal{C}(X_1;Y)$ y $\mathcal{C}(X_2;Y)$ tienen el mismo tipo de homotopía) para todo Y y eso *de manera natural en* Y, entonces X_1 y X_2 tienen el mismo tipo de homotopía. ¿Cómo se demostrará eso?