Solución del segundo parcial

2017-2 FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1. Sea X un revestimiento conexo del toro $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Ya que $\mathbb{Z}^2$ es un sub-grupo discreto del grupo topológico $\mathbb{R}^2$, la proyección canónica $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es un revestimiento y, ya que $\mathbb{R}^2$ es 1-conexo, el grupo fundamental de T es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Ya que T es localmente arco-conexo y $\pi_1(T)$ es abeliano, las clases de isomorfismo de revestimientos de T están en biyección con los sub-grupos de $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$. Si H es un sub-grupo no nulo de $\mathbb{Z}^2$, entonces H es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 1 o 2: si H tiene rango 1, entonces existe una base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ de $\mathbb{Z}^2$ y un entero n_1 tal que $n_1\vec{v_1}$ es una base de H; y si H tiene rango 2, entonces existe una base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ de $\mathbb{Z}^2$ y unos enteros (n_1, n_2) tal que n_1 divide n_2 y $(n_1\vec{v_1}, n_2\vec{v_2})$ es una base de H sobre $\mathbb{Z}$ (por el teorema de la base adaptada para sub-módulos de un módulo libre sobre un anillo principal). Nótese que, en ambos casos, la base (v_1, v_2) de $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo genera $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

En el primer caso (H de rango 1), el revestimiento de $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ correspondiente a $H \subset \mathbb{Z}^2$ (a saber, $\mathbb{R}^2/H \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) es isomorfo al revestimiento

$$\mathbb{R} \times S_1 \longrightarrow S_1 \times S_1, \quad (t, z) \longmapsto (e^{i2\pi t}, z^{n_1})$$

y en el segundo caso (H de rango 2), el revestimiento de T correspondiente a H es isomorfo al revestimiento

$$S_1 \times S_1 \longrightarrow S_1 \times S_1, \quad (z_1, z_2) \longmapsto (z_1^{n_1}, z_2^{n_2}).$$

En particular, si $X \longrightarrow T$ es un revestimiento compacto de T, entonces el espacio total de X es homeomorfo a $S_1 \times S_1$.

Ejercicio 2. a. Sea c_0, c_0' dos lazos basados en e y sean $c_1 \sim c_0$ y $c_1' \sim c_0'$ dos lazos más, respectivamente homótopos a c_0 y c_0'. Mostremos que $c_0 * c_0'$ es homótopo a $c_1 * c_1'$. Sea $H : I \times I \longrightarrow G$ (resp. H') una homotopía entre c_0 y c_1 (resp. c_0' y c_1'). Entonces la aplicación continua $H * H' : I \times I \longrightarrow G$ definida por $(s,t) \longmapsto H(s,t)H'(s,t)$ es una homotopía entre $c_0 * c_0'$ y $c_1 * c_1'$.

b. Dado $t \in [0;1]$, se tiene

$$\begin{aligned} \big((cc_e) * (c_e c')\big)(t) &= (cc_e)(t)\,(c_e c')(t) \\ &= \begin{cases} c(2t)c_e(2t) = c(2t) & \text{si } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ c_e(2t-1)c'(2t-1) = c'(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} \\ &= (cc')(t). \end{aligned}$$

De la misma manera, $(c_e c) * (c' c_e) = c'c$.

c. Recordemos que, para lazos en cualquier espacio topológico, se tiene $(cc_e) \sim c \sim (c_e c)$. Por el punto **a**, eso implica

$$(cc_e) * (c_e c') \sim c * c' \sim (c_e c) * (c' c_e).$$

Por el punto **b**, esto significa que cc' es homótopo a $c'c$. Por lo tanto, $\pi_1(G; e)$ es un grupo abeliano. En particular, tenemos $c * c' \sim cc' \sim c'c \sim c' * c$.

Observación: Una homotopía explícita entre $c * c'$ y $c' * c$ es

$$H(s,t) = c'(st)c(t)c'((1-s)t).$$

d. Para mostrar que los lazos $c^{-1} : t \longmapsto c(t)^{-1}$ y $\overline{c} : t \longmapsto c(1-t)$ son homótopos, es suficiente, por unicidad del inverso salvo homotopía, mostrar que $cc^{-1} \sim c^{-1}c \sim c_e$. Por los puntos anteriores, se tiene en efecto $(cc^{-1}) \sim c * c^{-1} = c_e = c^{-1} * c \sim c^{-1}c$.

Observación: Una homotopía explícita entre $\overline{c}c$ y c_e es

$$H(s,t) = \begin{cases} c(2t(1-s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2(1-t)(1-s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se puede también observar que una condición suficiente para mostrar que $\pi_1(G;e)$ es abeliano fue la existencia de una aplicación continua $\mu : G \times G \longrightarrow G$ (la operación de grupo) tal que las aplicaciones parciales $g \longmapsto \mu(g,e)$ y $g \longmapsto \mu(e,g)$ son homótopas a id_G, pues eso implicó (para lazos basados en e) que

$$\mu(c,c') \sim \mu(cc_e, c_e c') = \mu(c,c_e)\mu(c_e,c') \sim cc'$$

y

$$\mu(c,c') \sim \mu(c_e c, c' c_e) = \mu(c_e,c')\mu(c,c_e) \sim c'c.$$

Un espacio topológico con punto marcado dotado de tal aplicación μ se llama un H-espacio y, a parte de los grupos topológicos, los espacios de lazos $\Omega(X,x_0)$ son ejemplos de H-espacios (acá el punto marcado es $c_{x_0} \in \Omega(X,x_0)$), con μ la composición de caminos como la definimos en clase (aunque no demostramos que era continua). En particular, $\pi_2(X;x_0) := \pi_1(\Omega(X,x_0))$ es un grupo abeliano. Por inducción, $\pi_k(X;x_0)$ es abeliano por todo $k \geq 2$.