Solución del primer parcial

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio I

1. a. S_{4n-1} es la esfera unidad (vectores de norma 1) en $\mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$ y $\mathbf{Sp}(n)$ es el grupo de isometrías de $\mathbb{H}^n$, i.e. las matrices cuyas columnas forman familias ortonormales (acá, estamos viendo esas matrices como matrices con coeficientes en $\mathbb{H}$). Para mostrar que $\mathbf{Sp}(n)$ actúa transitivamente en S_{4n-1}, es suficiente mostrar que, dado un vector $v \in S_{4n-1}$, existe $A \in \mathbf{Sp}(n)$ tal que $A \cdot (1, 0, \ldots, 0) = v$, es decir que la primera columna de A es v. Y para ello es suficiente mostrar que v se puede completar en una base ortonormal de $\mathbb{H}^n$ (como $\mathbb{H}$-módulo a la izquierda), lo cual se puede demostrar por inducción sobre n.

Si una isometría $\mathbb{H}$-lineal A estabiliza el punto $e = (1, 0, \ldots, 0)$ de S_{4n-1}, entonces induce una isometría del sub-espacio $e^{\perp} \subset \mathbb{H}^n$, que es de dimensión $n-1$ sobre $\mathbb{H}$, por lo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ con $B \in \mathbf{Sp}(n-1)$. Recíprocamente, tal matriz $A \in \mathbf{Sp}(n)$ es una isometría de $\mathbb{H}^n$ que deja e fijo. La biyección $i : B \longmapsto A$ así definida entre $\mathbf{Sp}(n-1)$ y el establizador de e en $\mathbf{Sp}(n)$ es un isomorfismo de grupos.

b. El grupo $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathcal{M}(2n; \mathbb{C})$ es compacto pues es un sub-espacio cerrado y acotado en un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Ya que la acción de $\mathbf{Sp}(n)$ en S_{4n-1} es transitiva, la aplicación continua

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sp}(n) & \longrightarrow & S_{4n-1} \\ A & \longmapsto & A \cdot e \end{array}$$

es sobreyectiva. Y como el estabilizador del punto e es isomorfo a $\mathbf{Sp}(n-1)$, la aplicación anterior induce una biyección continua $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) \longrightarrow S_{4n-1}$. Pero $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)$ es compacto, como imagen continua de un compacto, y S_{4n-1} es Hausdorff. Por lo tanto, la biyección continua anterior es un homeomorfismo.

2. a. Por el Ejercicio 4 de la Hoja 1, si G es un grupo topológico y $H \subset G$ un sub-grupo conexo tal que G/H es conexo, entonces G es conexo[1]. Podemos utilizar esto para demostrar por inducción sobre $n \geq 1$ que $\mathbf{Sp}(n)$ es conexo. Ya que $\mathbf{Sp}(1) \simeq S_3$ (los cuaterniones de norma 1), $\mathbf{Sp}(1)$ es conexo. Si suponemos ahora que $n \geq 2$ y que $\mathbf{Sp}(n-1)$ es conexo, entonces, ya que $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) \simeq S_{4n-1}$ es conexo, tenemos que $\mathbf{Sp}(n)$ es conexo, lo cual termina la inducción.

b. Escribamos $a = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2n; \mathbb{C})$. Entonces $\overline{a}^t + a = 0$ si y solamente si $\overline{x}^t = -x$, $\overline{v}^t = -v$ y $u = -\overline{y}^t$ en $\mathcal{M}(n; \mathbb{C})$. Además $aJ = J\overline{a}$ si y solamente si $u = -\overline{y}$ y $v = \overline{x}$. Por lo tanto, $a \in \mathfrak{sp}(n)$ si y solamente si $a = \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & -x^t \end{pmatrix}$ con $\overline{x}^t = -x$ y $y^t = y$ (notemos que esto implica que $\mathrm{tr}(a) = 0$). De ello se deduce inmediatamente que $\mathfrak{sp}(n)$ es un espacio vectorial real. Las condiciones $x \in \mathfrak{u}(n)$ y $y \in \mathrm{Sym}(n; \mathbb{C})$ implican que

$$\dim \mathfrak{sp}(n) = \dim \mathfrak{u}(n) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}(n; \mathbb{C}) = n^2 + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1).$$

A manera de verificación, la fórmula anterior da $\dim \mathfrak{sp}(1) = 3 = \dim \mathfrak{su}(2) = \dim S_3$.

[1] Demostración: Sea $f : G \longrightarrow \{0; 1\}$ una función continua. Como H es conexo, cada gH es conexo y, por lo tanto, existe una función continua inducida $\overline{f} : G/H \longrightarrow \{0; 1\}$, tal que $\overline{f} \circ p = f$, donde $p : G \longrightarrow G/H$ es la proyección canónica. Como G/H es conexo, la función $\overline{f}$ es constante. Por lo tanto, $f = \overline{f} \circ p$ también es constante.

Sea ahora $a \in \mathfrak{sp}(n)$ y $A := \exp(a)$. Entonces $\overline{A}^t A = \exp(\overline{a}^t)\exp(a) = \exp(\overline{a}^t + a) = \exp(0) = I_{2n}$ (pues $\overline{a}^t$ y a conmutan). Además $J\overline{A}J^{-1} = J\overline{\exp(a)}J^{-1} = \exp(J\overline{a}J^{-1}) = \exp(a) = A$. Por lo tanto, $\exp(a) \in \mathbf{Sp}(n)$.

Para deducir de lo anterior que $\mathbf{Sp}(n)$ es localmente arco-conexo, es suficiente mostrar que exp induce un homeomorfismo de una vecindad abierta U de 0 en $\mathfrak{sp}(n)$ sobre una vecindad abierta V de I_{2n} en $\mathbf{Sp}(n)$, pues $\mathfrak{sp}(n)$ es localmente arco-conexo y cualquier punto $A \in \mathbf{Sp}(n)$ tendrá $A(V)$ como vecindad abierta. Para mostrar que U y V existen, vamos a aplicar el Teorema de Inversión Local[2]: la función $\exp : \mathcal{M}(2n;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(2n;\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(2n;\mathbb{C})$ es de clase C^1 y su derivada en 0 es un isomorfismo lineal (ya que $\exp'(0) = I_{2n}$), entonces por el TIL existe una vecindad abierta U_0 de 0 en $\mathcal{M}(2n;\mathbb{C})$ y una vecindad abierta V_0 de $\exp(0) = I_{2n}$ en $\mathbf{GL}(2n;\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(2n;\mathbb{C})$ tal que $\exp|_{U_0}$ induce un difeomorfismo de U_0 sobre V_0; luego se verifica directamente que, si $a \in U_0$, entonces se tiene $\exp(a) \in \mathbf{Sp}(n)$ si y solamente si $a \in \mathfrak{sp}(n)$, por lo tanto $\exp|_{U_0\cap\mathfrak{sp}(n)}$ induce un homeomorfismo del abierto $U := U_0 \cap \mathfrak{sp}(n)$ de $\mathfrak{sp}(n)$ sobre el abierto $V := \exp(U_0 \cap \mathfrak{sp}(n)) = V_0 \cap \mathbf{Sp}(n)$ de $\mathbf{Sp}(n)$.

3. Por el teorema recordado en el enunciado, la fibración localmente trivial[3]

$$\mathbf{Sp}(n-1) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1),$$

cuya fibra $\mathbf{Sp}(n-1)$ es conexa y localmente arco-conexa por las preguntas anteriores, induce un isomorfismo

$$\pi_1(\mathbf{Sp}(n))/\operatorname{Im} i_* \simeq \pi_1(\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)) \tag{1}$$

donde $i : \mathbf{Sp}(n-1) \hookrightarrow \mathbf{Sp}(n)$ es la inclusión de $\mathbf{Sp}(n-1)$ en $\mathbf{Sp}(n)$ encontrada en la Pregunta **1**. Mostremos por inducción sobre $n \geq 1$ que lo anterior implica que $\mathbf{Sp}(n)$ es 1-conexo.

Para $n = 1$, se tiene $\mathbf{Sp}(1) \simeq S_3$, que en efecto es 1-conexo. Sea entonces $n \geq 2$: si suponemos que $\mathbf{Sp}(n-1)$ es 1-conexo, tenemos $i_* = 0$ luego, utilizando (1) y la Pregunta **1**,

$$\pi_1(\mathbf{Sp}(n)) \simeq \pi_1(S_{4n-1}) = \{1\},$$

lo cual termina la inducción.

4. a. Hicimos una demostración similar en clase para el espacio proyectivo complejo: de la existencia de un homeomorfismo $\mathbf{Sp}(1)\backslash S_{4n+3} \simeq \mathbb{H}\mathbf{P}_n$, se deduce que $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es compacto y arco-conexo, pues S_{4n+3} también lo es y $\mathbf{Sp}(1)\backslash S_{4n+3}$ es imagen continua de S_{4n+3}. Además, como $\mathbf{Sp}(1)$ es compacto y actúa continuamente sobre el espacio compacto Hausdorff S_{4n+3}, se tiene que el cociente $\mathbf{Sp}(1)\backslash S_{4n+3}$, y por consiguiente $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$, es Hausdorff.

b. Hicimos una demostración similar en clase para el espacio proyectivo complejo. Acá el resultado es que existe una partición en celdas $\mathbb{H}\mathbf{P}_n = e^0 \cup e_4 \cup \ldots \cup e^{4n}$, donde $e^{4k} = \mathbb{H}\mathbf{P}_k - \mathbb{H}\mathbf{P}_{k-1}$, que define una descomposición celular. De forma equivalente, existen homeomorfismos $\mathbb{H}\mathbf{P}_k = \mathbb{H}\mathbf{P}_{k-1} \cup_f \overline{B^{4k}}$, donde $f : S_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_{k-1}$ es la proyección canónica (encontrada en la Pregunta **4.a**).

c. Por la descomposición celular obtenida anteriormente, tenemos $\mathbb{H}\mathbf{P}_1 = \mathbb{H}\mathbf{P}_0 \cup e^4 \simeq \{\mathrm{pt}\} \cup_\varphi \overline{B^4}$ donde $\varphi : \partial\overline{B^4} \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$. Por lo tanto, $\mathbb{H}\mathbf{P}_1 \simeq S_4$ (vimos en clase que $\{\mathrm{pt}\} \cup_\varphi \overline{B^4} \simeq S_4$).

---

[2]También es posible demostrarlo directamente, ya que, acá, exp es la exponencial de matrices concreta, definida por una serie de potencias con radio de convergencia positivo y primer termino no nulo. La demostración que utiliza el TIL se generaliza a la exponencial abstracta de un grupo de Lie.

[3]La idea para mostrar que la proyección canónica $p : \mathbf{Sp}(n) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)$ es localmente trivial, es utilizar la exponencial $\exp : \mathfrak{sp}(n) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n)$ para ver que p es localmente conjugada a la proyección canónica $\mathfrak{sp}(n-1) \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es un suplemento de $\mathfrak{sp}(n-1)$ en $\mathfrak{sp}(n)$.

d. Se tiene $\pi_1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \simeq \pi_1(X_2(\mathbb{H}\mathbf{P}_n))$ donde $X_2(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) = \mathbb{H}\mathbf{P}_0$ es el 2-esqueleto de $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$. Luego, $\pi_1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) = \pi_1(\{\mathrm{pt}\}) = \{1\}$. También es posible aplicar el mismo teorema de la Pregunta **3** a la fibración $\mathbf{Sp}(1) \longrightarrow S_{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_n$; ya que $\mathbf{Sp}(1)$ es 1-conexo, tenemos $\pi_1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \simeq \pi_1(S_{4n+3}) = \{1\}$.

Ejercicio II

a. Ya que A es contraíble, existe $a_0 \in A$ tal que $i : \{a_0\} \hookrightarrow A$ admite la retracción $r : A \longrightarrow \{a_0\}$ como inversa homotópica. Sea entonces $H : I \times A \longrightarrow A$ una homotopía entre id_A e $i \circ r$ y sea $i_A : A \hookrightarrow X$ la inclusión canónica. Ya que el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía por hipótesis e $\mathrm{id}_X|_A = i_A \circ H(0, \cdot\,)$, existe una aplicación continua $F : I \times X \longrightarrow X$ tal que $F(0, \cdot\,) = \mathrm{id}_X$ y $F|_{I\times A} = i_A \circ H$. En particular, para todo $t \in I$, $F(t, A) \subset A$, por lo que F induce una aplicación continua $\overline{F} : I \times X/A \longrightarrow X/A$ tal que $\overline{F} \circ (\mathrm{id}_I \boxtimes p) = p \circ F$:

$$\begin{tikzcd}
I \times X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{id}_I \boxtimes p"] & X \arrow[d, "p"] \\
I \times X/A \arrow[r, "\overline{F}"] & X/A
\end{tikzcd}$$

En particular, $\overline{F}(0, \cdot\,) = \mathrm{id}_{X/A}$.

Consideremos ahora la aplicación $F(1, \cdot\,) : X \longrightarrow X$. Para todo $a \in A$, se tiene $F(1, a) = i_A \circ H(1, a) = a_0$, por lo que $F(1 \cdot\,)$ induce una aplicación continua $u : X/A \longrightarrow X$ tal que $u \circ p = F(1, \cdot\,)$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F(1,\,\cdot\,)"] \arrow[d, "p"] & X \\
X/A \arrow[ur, "u"] &
\end{tikzcd}$$

En particular, $F : I \times X \longrightarrow X$ es una homotopía entre id_X y $u \circ p : X \longrightarrow X$.

Por otro lado, para todo $x \in X$, se tiene $\overline{F}(1, p(x)) = p \circ F(1, x) = p \circ u(p(x))$, es decir $\overline{F}(1, \cdot\,) = p \circ u$, por lo que $\overline{F} : I \times X/A \longrightarrow X/A$ es una homotopía entre $\mathrm{id}_{X/A}$ y $p \circ u : X/A \longrightarrow X/A$.

Por lo tanto, hemos mostrado que las aplicaciones continuas $p : X \longrightarrow X/A$ y $u : X/A \longrightarrow X$ son inversas homotópicas la una de la otra. En particular, $p : X \longrightarrow X/A$ es una equivalencia de homotopía.

b. Un ejemplo no trivial de la situación anterior es $X := S_2$ y $A := S_2^- \simeq \overline{B^2}$ (el hemisferio "sur"de S_2; en particular, A es contraíble). A es un sub-complejo para la descomposición celular finita de S_2 obtenida al pegarle dos bolas cerradas de dimensión 2 a un círculo; por lo tanto, $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración. El espacio $X/A \simeq S_2^+/\partial S_2^+$ es homeomorfo al espacio $\overline{B^2}/\partial\overline{B^2}$, por lo que, en efecto, X/A y X tienen el mismo tipo de homotopía.