Parcial 1

28/09/2017 — Florent Schaffhauser

Ejercicio I (10 puntos) Sea $\mathbb{H}$ el cuerpo de los cuaterniones. Se recuerda que $\mathbb{H}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, generado (como espacio vectorial) por los elementos 1, i, j y k, los cuales están sujetos a las relaciones de Hamilton:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Dado un entero $n \geq 1$, se identifica el espacio vectorial $\mathbb{H}^n$ con la pareja $(\mathbb{C}^{2n}, J)$ donde J es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$, vía la correspondencia $\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k \longmapsto (\alpha+\sqrt{-1}\beta, \gamma+\sqrt{-1}\delta)$, coordenada a coordenada. En esa identificación, la estructura de $\mathbb{H}$-espacio vectorial sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^{2n}$ viene definida por la regla $j \cdot v := J\overline{v}$ (de tal manera que, en efecto, $i \cdot (j \cdot v) = \sqrt{-1}J\overline{v} = J\overline{\sqrt{-1}\overline{v}} = J(\overline{-\sqrt{-1}v}) = -j \cdot (i \cdot v)$) y un automorfismo lineal de $\mathbb{H}^n$ es, por definición, una matriz $A \in \mathbf{GL}(2n, \mathbb{C})$ tal que $A \circ j = j \circ A$, es decir que $AJ = J\overline{A}$. Se denota $\mathbf{U}^*(2n)$ (o $\mathbf{GL}(n; \mathbb{H})$) el grupo de automorfismos lineales de $\mathbb{H}^n$ así definido. El grupo $\mathbf{GL}(1, \mathbb{H})$ es isomorfo a $\mathbb{H}^*$.

La norma de un vector $v \in \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$ es, por definición, $\|v\|^2 := \overline{v}^t v$ (la norma hermitiana canónica de $\mathbb{C}^{2n}$) y una isometría de $\mathbb{H}^n$ es, por definición, un automorfismo lineal que preserva la norma, es decir una matriz $A \in \mathbf{GL}(2n; \mathbb{C})$ que es a su vez unitaria ($A \in \mathbf{U}(2n)$, es decir que $\overline{A}^t A = I_{2n}$) y tal que $AJ = J\overline{A}$. Se denota

$$\mathbf{Sp}(n) := \mathbf{U}(2n) \cap \mathbf{U}^*(2n) = \{A \in \mathbf{GL}(2n; \mathbb{C}) \mid \overline{A}^t A = I_{2n} \text{ y } AJ = J\overline{A}\}$$

el grupo de isometrías así definido. El grupo $\mathbf{Sp}(1)$ es isomorfo al grupo $\mathbf{SU}(2)$ de cuaterniones de norma 1, el cual es homeomorfo a la esfera 3-dimensional $S_3 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$.

1. a. (1 punto) Mostrar que, para todo entero $n \geq 1$, $\mathbf{Sp}(n)$ actúa transitivamente en la esfera $S_{4n-1} \subset \mathbb{C}^{2n}$ y que el estabilizador del punto $(1, 0, \ldots, 0)$ es isomorfo a $\mathbf{Sp}(n-1)$.

b. (1 punto) Mostrar que $\mathbf{Sp}(n)$ es compacto y que existe un homeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) \simeq S_{4n-1}.$$

2. a. (1 punto) Mostrar que $\mathbf{Sp}(n)$ es conexo. *Indicación*: Utilizar el Ejercicio 4 de la Hoja 1.

b. (1 punto) Sea

$$\mathfrak{sp}(n) := \{a \in M(2n; \mathbb{C}) \mid \overline{a}^t + a = 0, aJ = J\overline{a}\}.$$

Mostrar que $\mathfrak{sp}(n)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n(2n+1)$ tal que, si $a \in \mathfrak{sp}(n)$, entonces $\exp(a) \in \mathbf{Sp}(n)$ y deducir de ello que $\mathbf{Sp}(n)$ es localmente arco-conexo.

3. (Bono, 1 punto) Mostar que $\mathbf{Sp}(n)$ es 1-conexo. *Indicación*: Utilizar que $\mathbf{Sp}(n-1) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)$ es una fibración localmente trivial y un teorema visto en clase[1].

4. Se considera el espacio proyectivo cuaterniónico

$$\mathbb{H}\mathbf{P}_n := \mathbb{H}^* \backslash (\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}).$$

a. (2 puntos) Mostrar que existe un homeomorfismo $\mathbb{H}\mathbf{P}_n \simeq \mathbf{Sp}(1) \backslash S_{4n+3}$ y deducir de ello que $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es un espacio topológico arco-conexo, compacto y Hausdorff.

[1] Sea $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ una fibración localmente trivial y sea $x_0 \in F$. Si F es conexo y localmente arco-conexo, entonces p induce un isomorfismo $\pi_1(E; i(x_0))/\mathrm{Im}\, i_* \simeq \pi_1(B; (p \circ i(x_0))$. En particular, si F es localmente arco-conexo y 1-conexo, entonces $\pi_1(E; i(x_0)) \simeq \pi_1(B; (p \circ i)(x_0))$.

b. `(2 puntos)` Se recuerda la existencia de unos encajes canónicos $\mathbb{H}\mathbf{P}_k \hookrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_n$. Mostrar que $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ tiene una descomposición celular finita cuya filtración por esqueletos es

$$\{\mathrm{pt}\} = \mathbb{H}\mathbf{P}_0 \subset \mathbb{H}\mathbf{P}_1 \subset \ \ldots \subset \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} \ \subset \mathbb{H}\mathbf{P}_n.$$

Precisar el número de celdas y la dimensión de cada celda en esa descomposición celular.

c. `(1 punto)` Mostrar que $\mathbb{H}\mathbf{P}_1 \simeq S_4$.

d. `(1 punto)` Calcular $\pi_1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n)$.

Ejercicio II `(Bono, 2 puntos)` Sea $i_A : A \hookrightarrow X$ una cofibración.

a. `(1 punto)` Mostrar que, si A es contraíble, entonces la proyección canónica

$$p : X \longrightarrow X/A$$

es una equivalencia de homotopía.

b. `(1 punto)` Dar un ejemplo de tal situación con $X = S_2$ y A no reducido a un punto.