Hoja de ejercicios 5 : Homología singular I

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico arco-conexo.
a. Mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} H_0(X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sum_{x\in X} n_x x & \longmapsto & \sum_{x\in X} n_x \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos.
b. Sea Y un espacio topológico arco-conexo y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Mostrar que el homomorfismo inducido $f_* : H_0(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(Y;\mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Ejercicio 2. Sea G un grupo y sea G' el sub-grupo generado por los conmutadores $[g_1, g_2]$ de pares de elementos de G.
a. Mostrar que G' es un sub-grupo normal de G.
b. Mostar que G/G' es un grupo abeliano y que, si A es un grupo abeliano y $f : G \longrightarrow A$ es un homomorfismo de grupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\overline{f} : G/G' \longrightarrow A$ tal que $\overline{f} \circ p = f$, donde $p : G \longrightarrow G/G'$ es el homomorfismo canónico.
c. Sea $H \subset G$ un sub-grupo normal. Mostrar que si G/H es abeliano entonces $G' \subset H$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea $\Delta_1 = [v_0v_1] \subset \mathbb{R}^2$ el 1-símplice estándar. Un polígono en X se define como una 1-cadena P de la forma $P = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i$, $\sigma_i \in \Delta_1(X)$ tal que, para todo $i \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$, $\sigma_i(v_1) = \sigma_{i+1}(v_0)$. Mostrar que una 1-cadena es un 1-ciclo si y solamente si es homóloga a una combinación lineal de polígonos.

Ejercicio 4. Sea X un espacio topológico arco-conexo y sea $x_0 \in X$. Mostrar que $H_0(X;x_0) \simeq \{0\}$ y que, para todo $n > 0$, $H_n(X, x_0) \simeq H_n(X)$.

Ejercicio 5. Sea

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de complejos de grupos abelianos. Mostrar que si dos de esos complejos tienen homología trivial, entonces el tercero también.

Ejercicio 6. Sea $A \subset X$ un sub-espacio de un espacio topológico.
a. Mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el grupo abeliano $S_n(X)/S_n(A)$ es libre y tiene una base en biyección con el conjunto de n-símplices singulares $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ tales que $\sigma(\Delta_n) \not\subset A$.
b. Mostrar que si A es un retracto de X, entonces la sucesión exacta larga del par (X, A) se divide en sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow 0$ que se escinden, es decir que $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

Ejercicio 7. Sean $(a_i : A_i \longrightarrow A_{i+1})_{1\le i\le 4}$ y $(b_i : B_i \longrightarrow B_{i+1})_{1\le i\le 4}$ dos sucesiones exactas de grupos abelianos. Sean $(f_i : A_i \longrightarrow B_i)_{1\le i\le 5}$ unos homomorfismos de grupos. Se supondrá que el diagrama así definido es conmutativo.
a. Mostrar que si f_2 y f_4 son inyectivos y f_1 es sobreyectivo, entonces f_3 es inyectivo.
b. Mostrar que si f_2 y f_4 son sobreyectivos y f_5 es inyectivo, entonces f_3 es sobreyectivo.
c. (*Lema de los* 5). Mostrar que si f_1 es inyectivo, f_2 y f_4 son isomorfismos, y f_5 es sobreyectivo, entonces f_3 es un isomorfismo.

Ejercicio 8. Utilizando la sucesión exacta de Mayer y Vietoris, mostrar que si $X = A \cup B$ con A y B dos abiertos de X tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(B)$.

Ejercicio 9. Supongamos que M es un $\mathbb{Z}$-módulo que cabe en una sucesión exacta corta de $\mathbb{Z}$-módulos de la forma

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

a. Mostrar que M es un grupo abeliano finito de cardinal 4 y también un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espacio vectorial.
b. Deducir de lo anterior todas las posibilidades salvo isomorfismo para el $\mathbb{Z}$-módulo M.
c. ¿Para cuáles M se escinde la sucesión exacta corta de $\mathbb{Z}$-módulos (1)?
d. Mostrar que si se ve la sucesión exacta corta (1) como una sucesión exacta corta de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-módulos, entonces siempre se escinde.