Hoja de ejercicios 4 - Revestimientos y fibraciones

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. **a.** Sea $p : Y \longrightarrow X$ un revestimiento arco-conexo. Mostrar que $\pi_1(X; x_0)$ actúa de manera transitiva en $p^{-1}(\{x\})$.
b. Mostrar que el estabilizador de $y_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ en $\pi_1(X; x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(Y; y_0)$.

Ejercicio 2. Mostrar que la proyección canónica $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ es un revestimiento. Determinar el grupo fundamental de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3. Sea $p : Y \longrightarrow X$ un revestimiento.
a. Mostar que si p tiene una sola hoja, entonces p es un homeomorfismo.
b. Mostrar que si X es Hausdorff, entonces Y también.
c. Supongamos X compacto. Mostar que Y es compacto si y solamente si p tiene un número finito de hojas.

Ejercicio 4. Sea X un espacio topológico Hausdorff y sea G un grupo finito (dotado de la topología discreta) actuando de manera continua en X. Mostrar si la acción de G es libre, entonces la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/G$ es un revestimiento (para la topología cociente en X/G).

Ejercicio 5. Mostrar que el grupo de automorfismos del revestimiento

$$p : S_n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}_n = \{\pm 1\}\backslash S_n$$

es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejercicio 6. Mostar que el grupo de automorfismos del revestimiento $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S_1$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 7. Mostar que el grupo de automorfismos del revestimiento $p : S_1 \longrightarrow S_1$ definido por $p(z) = z^n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejercicio 8. Clasificar, salvo isomorfismo, todos los revestimientos conexos de los siguientes espacios topológicos.
a. El círculo S_1.
b. El plano proyectivo real $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$.
c. El toro 2-dimensional $S_1 \times S_1$.

Ejercicio 9. Sea

$$\mathbf{PSL}(2; \mathbb{R}) := \mathbf{SL}(2; \mathbb{R})/\{\pm I_2\}.$$

Mostrar que la proyección canónica

$$p : \mathbf{SL}(2; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{PSL}(2; \mathbb{R})$$

es un revestimiento. ¿Cuál es su grupo de automorfismos?

Ejercicio 10. Sea (Z, z_0) un espacio topológico conexo y localmente arco-conexo con un punto marcado. Sea $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un homomorfismo de espacios topológicos con puntos marcados. Sea $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un revestimiento topológico.
a. Mostrar que existe un homomorfismo $\widetilde{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ si y solamente si $f_*\pi_1(Z; z_0) \subset p_*\pi_1(Y; y_0)$ en $\pi_1(X; x_0)$.
b. ¿Es único tal homomorfismo f?

Ejercicio 11. Sea G un grupo discreto actuando de manera propia y libre en un espacio topológico localmente compacto X.
a. Mostrar que la proyección canónica $p : X \longrightarrow G\backslash X$ es un revestimiento.
b. Supongamos X conexo y localmente arco-conexo. Mostrar que si $\pi_1(G\backslash X) \simeq G$.
Indicación: Mostar que $G \simeq \mathrm{Aut}_{G\backslash X}(X)$.

Ejercicio 12. Sea $p : Y \longrightarrow X$ un revestimiento y sea $G := \mathrm{Aut}_X(Y)$. Mostrar que las aplicaciones canónicas $q : Y \longrightarrow G\backslash Y$ y $\overline{p} : G\backslash Y \longrightarrow X$ son revestimientos.

Ejercicio 13. Se dice que una aplicación continua $p : Y \longrightarrow X$ es *no ramificada* si, para todo $y \in Y$, existe una vecindad V de y en Y tal que $p|V$ es inyectiva. Mostrar que una aplicación continua $p : Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo local si y solamente si es abierta y no ramificada.

Ejercicio 14. Sea X un espacio localmente conexo y sea $p : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local. Mostrar que la restricción de p a cualquier componente conexa de Y es un homeomorfismo local.

Ejercicio 15. Sea $p : Y \longrightarrow X$ una fibración localmente trivial con X de Hausdorff. Mostrar que Y es de Hausdorff si y solamente si las fibras de p son de Hausdorff.

Ejercicio 16. Determinar los grupos $\pi_1(\mathbf{SU}(n))$ y $\pi_1(\mathbf{U}(n))$ para todo $n \geq 1$.