Hoja de ejercicios 3 - Grupo fundamental

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Mostrar que los siguientes espacios tienen grupo fundamental trivial.
a. $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para $n \geq 3$.
b. $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ para $n \geq 3$ y $0 \leq k \leq n-3$.
c. Un conjunto estrellado $E \subset \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2. Mostrar que S_2 y $S_1 \times S_1$ no tienen el mismo tipo de homotopía, ni $\mathbf{SO}(3)$ y $S_1 \times S_2$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico arco-conexo. Mostrar que $\pi_1(X) = \{1\}$ si y solamente si dos caminos cualesquiera con las mismas extremidades son homótopos.

Ejercicio 4. Sea $c : S_1 \longrightarrow X$ una aplicación continua. Se denota $x := c(\mathbf{1})$ donde $\mathbf{1} = (1,0) \in S_1$.
a. Mostrar que si c se extiende a una aplicación continua $\overline{c} : B_2 \longrightarrow X$, entonces c es homótopa a una aplicación constante.
b. Supongamos ahora que existe una homotopía $H : I \times S_1 \longrightarrow X$ entre c y la aplicación constante $f_y \equiv y$, donde y es un punto cualquiera de X (no necesariamente igual a x). Mostrar que la aplicación $\tilde{c} : B_2 \longrightarrow X$ definida por

$$x \longmapsto \begin{cases} y & \text{si } 0 \leq |z| \leq \frac{1}{2} \\ H\left(2 - 2|z|, \frac{z}{|z|}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \end{cases}$$

es una extensión continua de c a B_2.
c. En la situación de **b**, mostrar que la aplicación $G : I \times S_1 \longrightarrow X$ definida por $(s,z) \longmapsto \tilde{c}\big((1-s)z + s\mathbf{1}\big)$ es una homotopía de lazos (es decir, relativa al punto de base) entre c y el lazo constante $f_x : S_1 \longrightarrow X$ (donde $x = c(1)$).
d. Se supone de ahora en adelante que X es arco-conexo. Deducir de lo anterior que $\pi_1(X)$ es trivial si y solamente si cualquier aplicación continua de S_1 a X se extiende a una aplicación continua de B_2 a X.

Ejercicio 5. Mostrar que si X_1 y X_2 son dos abiertos de un espacio topológico X que cumplen con las hipótesis del teorema de Van Kampen y tal que $X_0 := X_1 \cap X_2$ tiene π_1 trivial, entonces los homomorfismos canónicos $k_i : \pi_1(X_i; x_0) \longrightarrow \pi_1(X; x_0)$, donde $x_0 \in X_0$, son inyectivos.

Ejercicio 6. Mostrar que $\pi_1(\mathbf{U}(2)) \simeq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 7. Mostrar que $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S_1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, donde $S_1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de la manera habitual.

Ejercicio 8. Mostrar que un disco menos p puntos no es el homótopo a un disco menos q puntos si $q \neq p$. *Indicación*: Calcular el π_1 de cada espacio y abelianizarlo.

Ejercicio 9. **a.** Mostrar que si $n \geq 2$, un abierto de $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$.
b. Mostrar que si $n \geq 3$, un abierto de $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 10. Sea $z_0 = \mathbf{1} \in S_1$. Sea $T^2 = S_1 \times S_1$ el toro 2-dimensional y sea $x_0 = (z_0, z_0) \in T^2$.
a. Dar generadores explícitos de $\pi_1(T^2; x_0)$ y mostrar que ese grupo es un grupo abeliano libre de dos generadores (es decir, isomorfo a $\mathbb{Z}^2$).
b. Se considera el bouquet $X = S_1 \vee_{z_0} S_1$. Utilizando la versión débil del teorema de Van Kampen, dar generadores explícitos α y β de $\pi_1(X; z_0)$.
c. Utilizando la versión fuerte del teorema de Van Kampen, mostrar que $\pi_1(X; z_0)$ es el grupo libre generado por α y β, es decir que cada elemento de $\pi_1(X; z_0)$ se escribe de manera única como producto (reducido) $\alpha^{n_1}\beta^{p_1}\dots\alpha^{n_k}\beta^{p_k}$.
d. Se recuerda que $\pi_1(T^2; x_0)$ admite la presentación finita $< a, b \mid [a,b] >$. Sea $\Sigma := T^2 \# T^2$. Utlizando el teorema de Van Kampen, mostrar que $\pi_1(\Sigma)$ admite la presentación finita $< a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] >$.

Ejercicio 11. Sea $f : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un encaje, sea $K := f(S_1)$ y sea $S_3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandrov de $\mathbb{R}^3$. Sea $B(0; R]$ una bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ tal que $K \subset B(0; R]$. Sea $X_1 := B(0; R+1) \setminus K$ y sea $X_2 := S_3 \setminus B(0; R]$, de tal manera que $X_1 \cup X_2 = (S_3 \setminus K)$ y $X_1 \sim (\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Sea x_0 tal que $\|x_0\| = R + \frac{1}{2}$, de tal manera que $x_0 \in X_0 := X_1 \cap X_2$.
a. Mostrar que X_1 y X_2 cumplen con las hipótesis del teorema de Van Kampen en $X := S_3 \setminus K$.
b. Deducir de lo anterior que $\pi_1(S_3 \setminus K; x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K; x_0)$.