Hoja de ejercicios 2 - Homotopía en complejos celulares

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $n \geq 1$ un entero. Mostrar que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tiene el tipo de homotopía de un complejo celular finito.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}\mathbf{P}_n = \{\pm 1\}\backslash S_n$ el espacio proyectivo real n-dimensional. Se considera la filtración canónica

$$\mathbb{R}\mathbf{P}_0 \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_{n-1} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}_n.$$

a. Mostrar que $e^0 := \mathbb{R}\mathbf{P}_0$ es una 0-celda y que, para cualquier $k \in \{1; \ldots; n\}$, el sub-espacio $e^k := \mathbb{R}\mathbf{P}_k - \mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1}$ es una k-celda.
b. Sea $k \geq 1$ y sea p_k la proyección canónica $p_k : S_{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1}$. Mostrar que el espacio topológico $\mathbb{R}\mathbf{P}_{k-1} \cup_{p_k} \overline{B^k}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}\mathbf{P}_k$.
c. Deducir de lo anterior que la descomposición celular $(e^k)_{0\leq k\leq n}$ define una estructura de complejo celular finito en $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$.
d. Precisar, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, cuál es el k-esqueleto de $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ en la descomposición celular anterior.

Ejercicio 3. Sea $I = [0; 1] \subset \mathbb{R}$.
a. Mostrar que $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ es homeomorfo al espacio topológico cociente $(I \times I)/\sim$ donde $\sim$ es una manera de identificar los puntos $(s, 0)$ y $(1 - s, 1)$ para cualquier $s \in I$, así como los puntos $(0, t)$ y $(1, 1 - t)$ para cualquier $t \in I$.
b. Deducir de lo anterior la existencia de una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ con dos 0-celdas, dos 1-celdas y una 2-celda (en particular, esa descomposición celular de $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ es distinta a la del Ejercicio 2).

Ejercicio 4. Sea (X, P) un complejo celular y sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sus esqueletos. Mostar que, para todo $k \geq 1$, X_k/X_{k-1} es homeomorfo a un bouquet de esferas k-dimensionales $\vee_\alpha S_k$, una para cada k-celda de X.

Ejercicio 5. Dado un espacio topológico con punto marcado (X, x_0), se define su suspensión reducida

$$S(X, x_0) := (\Sigma X/\sim, [x_0])$$

donde $\Sigma X = (X \times I)/\sim'$ es la suspensión ordinaria de X y $\sim$ es la relación de equivalencia en ΣX que identifica los puntos $[x_0, t]$ para todo $t \in [0; 1]$.
a. Teniendo cuidado con los puntos marcados, mostrar que existe un homeomorfismo

$$S(X_1 \vee X_2) \simeq SX_1 \vee SX_2,$$

es decir que la suspensión reducida se distribuye sobre el bouquet.
b. Mostrar que si X tiene una estructura de complejo celular, entonces SX tiene el mismo tipo de homotopía que ΣX.
c. Deducir de lo anterior (o mostrar directamente) que $S(S_n) \sim S_{n+1}$.

Ejercicio 6. Sean (X, P) y (Y, Q) dos complejos celulares. Notemos $P = (e_i)_{i\in I}$ y $Q = (\varepsilon_j)_{j\in J}$ las particiones de X y Y en celdas así definidas.
a. Mostrar que $(e_i \times \varepsilon_j)_{(i,j)\in I\times J}$ es una descomposición celular de $X \times Y$.
Indicación: recordar que $\overline{B^p} \simeq \overline{B^q} \simeq \overline{B^{p+q}}$ y mostrar que, si f_i es una aplicación característica para e y g una aplicación característica para ε, entonces $f_i \boxtimes g_j$ es una aplicación característica para $e_i \times \varepsilon_j$.
b. Hallar descomposición celulares (finitas) para: el toro n-dimensional $T^n \simeq S_1^n$, el toro pleno $\overline{B^2} \times S_1$, el cilindro $S_1 \times I$ y el cilindro pleno $\overline{B^2} \times I$.

Ejercicio 7. Sea $A \hookrightarrow X$ una cofibración.
a. Mostrar que si A es contraíble, entonces la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/A$ es una equivalencia de homotopía.
b. Sea CA el cono sobre A y sea $Y := X \cup_f CA$ donde f es la identidad de $A \subset CA$. Mostrar que $Y/CA \simeq X/A$ (homeomorfismo) y, utilizando que CA es contraíble, concluir que $X/A \sim X \cup_f CA$ (mismo tipo de homotopía).

Ejercicio 8. Mostrar la existencia de unos homeomorfismos entre los siguientes espacios.
a. $\mathbb{R}\mathbf{P}_1 \simeq S_1 \simeq \mathbf{SO}(2)$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}_1 \simeq S_2$.
b. $\mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ y

$$\mathbb{R}\mathbf{P}_3 \simeq \mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)/\{\pm 1\}.$$

Indicación: Identificar primero $\mathbf{SU}(2)$ con los cuaterniones de norma 1 (esfera unidad 3-dimensional en $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$) y mostrar que actúa por conjugación en los cuaterniones imaginarios puros (espacio vectorial real de dimensión 3), preservando la norma.