Hoja de ejercicios 1 - Nociones básicas

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Mostrar que un espacio contraíble es arco-conexo.

Ejercicio 2. Sea X un espacio topológico. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es contraíble.
2. La aplicación id_X es homótopa a una aplicación constante.
3. Cualquier aplicación continua de un espacio topológico Y al espacio X es homótopa a una aplicación constante.
4. Dos aplicaciones continuas cualesquiera de un mismo espacio topológico Y al espacio X son homótopas.
5. Cualquier aplicación continua del espacio X a un espacio topológico Y es homótopa a una aplicación constante.
6. Dos aplicaciones continuas cualesquiera del espacio X a un mismo espacio topológico Y son homótopas.

Ejercicio 3. Se considera el grupo ortogonal $\mathbf{O}(n+1)$ y la esfera $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
a. Mostrar que $\mathbf{O}(n+1)$ actúa continuamente sobre S_n.
b. Sea $x_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S_n$. Mostrar que el conjunto

$$H := \{A \in \mathbf{O}(n+1) \mid Ax_0 = x_0\}$$

es un sub-grupo cerrado de $\mathbf{O}(n+1)$, isomorfo a $\mathbf{O}(n)$.
c. Identificando $\mathbf{O}(n)$ al sub-grupo H de $\mathbf{O}(n+1)$, mostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O}(n+1) & \longrightarrow & S_n \\ A & \longmapsto & Ax_0 \end{array}$$

induce un homeomorfismo del espacio topológico cociente $\mathbf{O}(n+1)/\mathbf{O}(n)$ sobre S_n.
d. Mostrar de la misma manera que existen homeomorfismos

$$\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n) \simeq S_n$$

y

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{U}(n+1)/\mathbf{U}(n) & \simeq & \mathbf{SU}(n+1)/\mathbf{SU}(n) \\ & \simeq & S_{2n+1}. \end{array}$$

e. ¿Cuál sería una descripción similar para las esferas S_{4n+3}?

Ejercicio 4. Sea G un grupo topológico y sea H un sub-grupo.
a. Mostrar que si H es conexo y G/H es conexo, entonces G es conexo. *Indicación*: Mostrar que cualquier aplicación continua $f : G \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante.
b. Deducir de lo anterior, por inducción sobre $n \geq 1$, que $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ y $\mathbf{SU}(n)$ son conexos.
c. Mostrar que $\mathbf{O}(n)$ tiene dos componentes conexas.

Ejercicio 5. Mostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es homótopa a una aplicación constante y $g : Y \longrightarrow Z$ es continua, entonces $g \circ f$ es homótopa a una aplicación constante.

Ejercicio 6. Mostrar que $\mathbb{R}^2$ menos un conjunto finito de puntos tiene el mismo tipo de homotopía de un bouquet de círculos.

Ejercicio 7. Mostrar que un toro menos un punto tiene el mismo tipo de homotopía de un bouquet de dos círculos.

Ejercicio 8. Sea $I = [0; 1] \subset \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{M} := (I \times I)/\sim$ la cinta de Möbius ($\sim$ es la relación de equivalencia en $I \times I$ que identifica los puntos $(0, t)$ y $(1, 1 - t)$, para cualquier $t \in I$). Se denota $p : I \times I \longrightarrow \mathcal{M}$ la proyección canónica.
a. Sea $A = p([0; 1] \times \{\frac{1}{2}\}) \subset \mathcal{M}$. Mostrar que A es un retracto por deformación de $\mathcal{M}$.
b. Deducir de lo anterior que $\mathcal{M}$ tiene el mismo tipo de homotopía del círculo S_1.

Ejercicio 9. Sea G un grupo topológico conexo y sea Γ un sub-grupo normal y discreto de G. Mostrar que Γ está incluido en el centro de G. *Indicación*: Para $\gamma \in \Gamma$, considerar la aplicación continua $(g \in G) \longmapsto g\gamma g^{-1}$.

Ejercicio 10. Sea Γ un grupo discreto actuando continua y propiamente en un espacio topológico X. Mostrar que la acción es libre si y solamente si Γ no tiene elementos de orden finito.

Ejercicio 11. Sea G un grupo topológico Hausdorff y sea Γ un sub-grupo discreto. Mostrar que Γ es cerrado en G.