Universidad de Los Andes | Topología algebraica

Examen final (2 horas)

28 de noviembre del 2017 | Florent Schaffhauser

En todo lo que sigue, A es un anillo conmutativo unitario.

Ejercicio 1. `(2 puntos)` Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un sub-espacio cerrado. Supongamos que existe una vecindad abierta V de Y en X tal que Y es un retracto por deformación de V. Mostrar que la proyección canónica $p : X \longrightarrow X/Y$ induce isomorfismos $H_n(X, Y; A) \simeq H_n(X/Y; A)$ para todo entero $n \geq 1$.

Ejercicio 2. `(3 puntos)` Sean $n, m \geq 1$ dos enteros y sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos.

a. `(1 punto)` Sea $x \in U$. Utilizando la propiedad de excisión, mostrar que, para todo entero $k \geq 0$, existe un isomorfismo $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq H_k(U, U - \{x\}; \mathbb{Z})$.

b. `(1 punto)` Mostrar que, para $k, n \geq 1$, se tiene

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; \mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_{k-1}(S_{n-1}; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

c. `(1 punto)` Mostrar que si U es homeomorfo a V, entonces $n = m$.

Ejercicio 3. `(3 puntos)` Sean $n \geq 1$ un entero. Si $f : S_n \longrightarrow S_n$ es una aplicación continua, se denota $\mathrm{gdo}(f) \in \mathbb{Z}$ el grado de esa aplicación. El propósito del ejercicio es mostrar que el único grupo no trivial que puede actuar libremente sobre S_{2k} es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. `(1 punto)` Recordar brevemente por qué:

(1) Si f no tiene puntos fijos, entonces $\mathrm{gdo}(f) = (-1)^{n+1}$.
(2) Si f es un homeomorfismo, entonces $\mathrm{gdo}(f) = \pm 1$.

b. `(2 puntos)` Sea $G \subset \mathrm{Homeo}(S_{2k})$ un sub-grupo del grupo de homeomorfismos de S_{2k} y considérese el homomorfismo de grupos

$$\chi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ f & \longmapsto & \mathrm{gdo}(f) \end{array}.$$

Mostrar que si la acción de G es libre, entonces χ es inyectivo y concluir.

c. `(Bono, 0.5 punto)` Dar un ejemplo de una acción libre de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en S_1.

Ejercicio 4. `(2 puntos)` Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un sub-espacio, con $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión canónica.

a. `(1 punto)` Supongamos que Y es un retracto de X. Mostrar que, para todo entero $k \geq 0$, existe una sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow H_k(Y; A) \longrightarrow H_k(X; A) \longrightarrow H_k(X, Y; A) \longrightarrow 0.$$

b. `(1 punto)` Mostrar que, si $n \geq 1$ es un entero, entonces S_n no es un retracto de la bola cerrada $\overline{B^{n+1}}$.

c. `(Bono, 0.5 punto)` Mostrar que cualquier aplicación continua $f : \overline{B^{n+1}} \longrightarrow \overline{B^{n+1}}$ tiene un punto fijo.