Parcial 4 (Duración: 1h15)

21 DE NOVIEMBRE DEL 2017 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas, etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. Debe entregar el tema con su hoja de examen.

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $X'(t) = AX(t)$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. (2 puntos) Mostrar que las funciones

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forman una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea $X'(t) = AX(t)$.

b. (1 punto) Mostrar que $X_1(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c. (1 punto) Estudiar $\lim_{t \to +\infty} e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3 (4 puntos)

Sea $u : [0;30] \times [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $f : [0;30] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ \frac{30-x}{20} & \text{si } 10 < x \leq 30. \end{cases}$$

Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= 4u_{xx}(x,t) & (0 < x < 30, t > 0), \\ u(0,t) &= 0 & (t \geq 0), \\ u(30,t) &= 0 & (t \geq 0), \\ u(x,0) &= f(x) & (0 \leq x \leq 30). \end{cases}$$