Solución del cuarto parcial

2017-2 Florent Schaffhauser

Ejercicio 1 La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene un solo valor propio (igual a 2) y no es diagonal: el vector $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio ($AV_1 = 2V_1$) y el vector $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio generalizado ($AV_2 = V_1 + 2V_2$). Un teorema visto en clase implica entonces que la familia

$$(e^{2t}V_1, e^{2t}(tV_1 + V_2)) = \left(\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right)$$

es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea $X'(t) = AX(t)$.

Ejercicio 2 a. Se verifica por un cálculo directo que, para todo $j = 1, 2, 3$, se tiene $X_j'(t) = AX_j(t)$, es decir que cada función $X_j(t)$ en efecto es solución de la ecuación $X'(t) = AX(t)$. Nótese que esto es así porque cada $X_j(t)$ es de la forma $e^{\lambda_j t}C_j$, donde λ_j es valor propio de A y C_j es un vector propio asociado (es decir que $AC_j = \lambda_j C_j$).

Para mostrar que la familia de funciones (X_1, X_2, X_3) es una base del espacio de soluciones de la ecuación $X'(t) = AX(t)$, es suficiente (ya que ese espacio tiene dimensión 3) mostrar que esa familia es libre en el espacio de soluciones. Y para ello, gracias a un teorema visto en clase, es suficiente ver que la familia $(X_1(0), X_2(0), X_3(0))$ es libre en $\mathbb{R}^3$. Ahora, eso es evidente, porque esos tres vectores son vectores propios de A asociados a valores propios distintos (también se puede calcula un determinante).

b. Para mostrar que $X_1(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es suficiente mostrar que estas dos funciones de clase C^1 son soluciones de una misma ecuación diferencial con coeficientes continups y que son iguales en un punto. Ya sabemos que $X_1'(t) = AX_1(t)$. Ahora, también se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{tA} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = Ae^{tA} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y además, estas dos soluciones son iguales en 0, lo cual termina la demostración.

c. Como en la Pregunta **b**, se demuestra que

$$etA \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-2t} = 0$, se tiene que $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$.

Ejercicio 3 Se aplica el método de separación de las variables: se busca una solución $u(x,t)$ bajo la forma $X(x)T(t)$. Entonces, por un lado, la ecuación $u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t)$ se vuelve $X(x)T'(t) = 4X''(x)T(t)$. Suponiendo que X y T no son identicamente nulas, las funciones $x \longmapsto \frac{X''(x)}{X(x)}$ y $t \longmapsto \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$ son iguales donde están definidas y por lo tanto son funciones constantes. Denotaremos $-\lambda$ la constante de separación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

de modo que llegamos al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} X''(x)+\lambda X(x) & = & 0 \\ T'(t)+4\lambda T(t) & = & 0 \end{array}\right.$$

Por otro lado, las condiciones de borde $u(0,t)=u(0,30)=0$ se vuelven, bajo nuestra hipótesis que $u(x,t)=X(x)T(t)$,

$$X(0)T(t)=X(30)T(t)=0$$

para todo $t>0$. Para evitar $T\equiv 0$, se debe imponer $X(0)=X(30)=0$. Pero entonces la ecuación $X''(x)+\lambda X(x)=0$, con condición de borde $X(0)=X(30)=0$ tiene soluciones no triviales si y solamente si $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{30^2}$ para algún $n=1,2,\ldots$. Y para tal n fijo, cualquier solución es múltiple de la solución fundamental

$$X_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)$$

(se puede notar que el espacio de soluciones de esta ecuación de orden 2 con condiciones de borde es de dimensión 1 y no 2 como sería el caso para un problema de Cauchy de orden 2). Además, para $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{30^2}$, la ecuación $T'(t)+4\lambda T(t)=0$ tiene soluciones no triviales, todas múltiples de la solución fundamental

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t}.$$

Se verifica entonces que la función $u_n(x,t):=X_n(x)T_n(t)$ es solución del problema

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{rcll} u_t(x,t) & = & 4u_{xx}(x,t) & (0<x<30, t>0) \\ u(0,t) & = & 0 & (t>0) \\ u(30,t) & = & 0 & (t>0) \\ u(x,0) & = & f(x) & (0<x<30) \end{array}\right.$$

salvo tal vez la última condición. Tal es el caso también de la función $u(x,t)$ definida por la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t},$$

siempre y cuando ésta converge. Y entonces tenemos, para todo $x\in]0;30[$,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right),$$

la cual queremos que sea igual a $f(x)$. Para ver cuál elección de los coeficientes $(c_n)_{n\geq 1}$ permite eso, tratemos de expresar $f(x)$ bajo la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)$. Ya que

$$\int_0^{30}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } n\neq m, \\ \frac{30}{2} & \text{si } n=m \end{array}\right.$$

Si suponemos que

$$\int_0^{30}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{x}\right)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\int_0^{30} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{30}x\right)\,dx,$$

entonces viene, para todo $m\geq 1$,

$$c_m(f)=\frac{2}{30}\int_0^{30} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{30}x\right)\,dx.$$

Para calcular explícitamente estos coeficientes, se utiliza la expresión analítica de f dada en el enunciado: viene, para todo $n\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{2}{30}\int_0^{30} f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{30}\left[\int_0^{10}\frac{x}{10}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx+\int_{10}^{30}\frac{30-x}{20}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx\right].
\end{aligned}
$$

Calculando la primera integral por partes, viene:

$$
\frac{1}{10}\int_0^{10} x\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx = -\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{30}{n\pi}+\frac{1}{10}\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right). \tag{2}
$$

Y procediendo de la misma manera para la segunda, viene:

$$
\begin{aligned}
&\int_{10}^{30}\frac{30-x}{20}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\left(-\frac{30}{n\pi}\right)(-1)^n+\frac{90}{2n\pi}\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\
&\quad +\frac{3}{2n\pi}\left[30(-1)^n-10\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]-\frac{3}{2n\pi}\int_{10}^{30}\cos\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Sumando (2) y (3), viene

$$
\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{2}{30}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{3}{2n\pi}\int_{10}^{30}\cos\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,dx\right] \\
&= \frac{2}{30}\left[\frac{1}{10}\left(\frac{30}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{3}{2n\pi}\,\frac{30}{n\pi}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{9}{(n\pi)^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos construido la solución (formal)

$$
u(x,t)=\frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{30}x\right)\,e^{-\left(\frac{n\pi}{15}\right)^2 t}
$$

a la Ecuación (1).