Solución del tercer parcial

2017-2 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1

Notemos que la transformada de Laplace de g existe y que, para todo $s > 0$, $\mathcal{L}_g(s) = \frac{e^{(-3/2)s}}{s} - \frac{e^{(-5/2)s}}{s}$. Ahora,

$\mathcal{L}(y'' + 4y' + 13y) = s^2\mathcal{L}_y - sy(0) - y'(0) + 4(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 13\mathcal{L}_y = (s^2 + 4s + 13)\mathcal{L}_y,$

Por lo tanto, para todo $s > 0$,

$$\mathcal{L}_y = \frac{e^{(-3/2)s} - e^{(-5/2)s}}{s(s^2 + 4s + 13)}.$$

Sea $H(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 4s + 13)} = \dfrac{1}{13}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s+4}{s^2 + 4s + 13}\right)$ o, de manera equivalente,

$$H(s) = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}\right).$$

Usando la tabla llegamos a que

$$h(t) = \frac{1}{13}[1 - e^{-2t}\cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-2t}\sin(3t)].$$

Finalmente, $y(t) = u_{3/2}(t)h(t - 3/2) - u_{5/2}(t)h(t - 5/2)$

Ejercicio 2

La transformada de Laplace de la distribución δ_5 es la función $s \longmapsto e^{-5s}$. Luego, por definición, una función $y : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es solución del problema de Cauchy generalizado

$$(\mathrm{G}) : \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + 3y' + 2y & = & \delta_5 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1/2 \end{array} \right.$$

si y solamente si la transformada de Laplace de y existe y cumple con la ecuación

$$(s^2\mathcal{L}_y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(s\mathcal{L}_y(s) - y(0)) + 2\mathcal{L}_y(s) = e^{-5s},$$

es decir (teniendo en cuenta las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1/2$):

$$\mathcal{L}_y(s) = \frac{1/2 + e^{-5s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1/2}{s^2 + 3s + 2} + \frac{e^{-5s}}{s^2 + 3s + 2} \tag{1}$$

donde se utilizó que, para todo $s \in \mathbb{R}$, $s^2 + 3s + 2 \neq 0$. Busquemos primero una función $h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_h(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$. Aplicando fracciones parciales tenemos

$$\mathcal{L}_h(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \tag{2}$$

Usando la tabla tenemos que la función

$$h(t) := e^{-t} - e^{-2t} = 2e^{-\frac{3}{2}t}\mathrm{sh}(t)$$

es solución de (2) y la función

$$y(t) := \frac{1}{2}h(t) + u_5(t)h(t - 5)$$

(donde $u_5(t) = 0$ si $t < 5$ y $u_5(t) = 1$ si $t \geq 5$) es solución del problema de Cauchy generalizado (G), pues y es una función cuya transformada de Laplace existe y es solución de (1).

Ejercicio 3

La ecuación propuesta es la ecuación de Volterra (la solucionamos en clase):

$$y(t) + \int_0^t (t-u)y(u)\,du = \operatorname{sen}(2t).$$

Tomando la transformada de Laplace a cada lado de la ecuación, viene: para todo $s > 0$,

$$\mathcal{L}_y(s) + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}_y(s) = \frac{2}{s^2+4},$$

luego

$$\mathcal{L}_y(s) = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+1} + \frac{\frac{8}{3}}{s^2+4} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{3}\,\frac{2}{s^2+2^2}$$

y $y(t) := -\frac{2}{3}\operatorname{sen}(t) + \frac{4}{3}\operatorname{sen}(2t)$ es solución de la ecuación de Volterra.