

Parcial 3 (Duración: 40 minutos)

27 DE OCTUBRE DEL 2017

FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. Debe entregar el tema con su hoja de examen.

Al respaldo de esta hoja se encuentra una tabla con las transformadas de Laplace de algunas funciones usuales.

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dado $c \in [0; +\infty[$, se denota u_c la función definida por $u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < c \\ 1 & \text{si } t \geq c \end{cases}$.

Sea $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t).$$

Utilizando la transformación de Laplace, resolver el problema de Cauchy

$$(C) : \begin{cases} y'' + 4y' + 13y & = g(t) \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dado $t_0 \in [0; +\infty[$, se denota δ_{t_0} la distribución de Dirac en t_0 (función generalizada).

Utilizando la transformación de Laplace, resolver el problema de Cauchy generalizado

$$(G) : \begin{cases} y'' + 3y' + 2y & = \delta_5 \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1/2 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (1 punto)

Utilizando la transformación de Laplace, resolver la ecuación integral

$$(I) : y(t) + \int_0^t (t-u)y(u) du = \text{sen}(2t).$$

*** TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE USUALES AL RESPALDO ***

Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	(1) $\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$ (19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2) te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$ (20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3) $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$ (21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	
$\delta(t)$	1	(5) $e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$ (22)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6) $e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$ (23)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7) $e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$ (24)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	
$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9) $e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$ (25)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10) $t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$ (26)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11) $t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$ (27)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12) $t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$ (28)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13) $t \cosh kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 - k^2)^2}$ (29)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14) $\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$ (30)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ (31)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16) $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$ (32)
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17) $\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$ (33)
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)	