Solución del primer parcial

2017-2 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1

Se trata de una ecuación lineal no homogénea de orden 1 con coeficientes variables: podemos intentar resolverla utilizando un factor integrante. Multiplicando a ambos lados la ecuación (E) por $\mu(t) \neq 0$, se obtiene

$$(\mathrm{E}') : \mu(t)y'(t) + \frac{t}{2}\mu(t)y(t) = \mu(t).$$

Para que el primer miembro sea de la forma $(\mu y)'(t)$, es suficiente tener $\mu'(t) = \frac{t}{2}\mu(t)$ para todo t, es decir $\mu(t) = e^{t^2/4}$. Y entonces la ecuación (E′) es equivalente a $\frac{d}{dt}(e^{t^2/4}y(t)) = e^{t^2/4}$, es decir que

$$e^{t^2/4}y(t) = \int_0^t e^{s^2/4}\,ds + \mathrm{cte}.$$

Para determinar el valor de la constante de integración, se utiliza la condición inicial $y(0) = 4$, lo cual nos da cte $= 4$, luego

$$y(t) = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}\,ds + 4e^{-t^2/4}.$$

Ejercicio 2

Se trata de una ecuación lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes: podemos resolverla utilizando su ecuación característica, la cual es $r^2 + 5r + 6 = 0$. El discriminante de esa ecuación es $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1 > 0$, por lo que la ecuación tiene dos raíces reales distintas $r_1 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2} = -2$ y $r_2 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$. Por lo tanto, el espacio de soluciones de la ecuación (E) es

$$\{y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{-3t} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

el cual es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ vía la aplicación lineal $y \longmapsto (y(0), y'(0))$.

Ejercicio 3

a. La ecuación $(2y^3 - xy) + 4y' = 0$ no es exacta, pues $\frac{\partial}{\partial y}\left(2y^3 - xy\right) = 6y^2 - x \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x}(2)$.

b. Si $v = \frac{1}{y^2}$ con y solución de (E), que por lo tanto no se anula en una vecindad de 0, entonces $v > 0$ y

$$v' = -2\frac{y'}{y^3} = -2\frac{xy - y^3}{y^3} = -\frac{x}{2y^2} + 1 = -\frac{x}{2}v + 1$$

y $v(0) = \frac{1}{y(0)^2} = \frac{1}{(-1/2)^2} = 4$.

Recíprocamente, si $v > 0$ es solución de (E') y $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{v(x)}}$ (poner el signo menos es la única manera de garantizar que, si y existe, entonces $y(0) < 0$, como en la condición inicial de (E)), entonces

$$2y^3 - xy + 4y' = \frac{2}{v(x)\sqrt{v(x)}} - \frac{x}{\sqrt{v(x)}} + 4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{v'(x)}{v(x)\sqrt{v(x)}} = -\frac{2 - xv(x) - 2(1 - \frac{x}{2}v(x))}{v(x)\sqrt{v(x)}} = 0$$

y $y(0) = -\frac{1}{\sqrt{v(0)}} = -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, los problemas (E) y (E') son equivalentes (existe una biyección entre sus respectivos conjuntos de soluciones).

c. El problema (E') fue resuelto en el Ejercicio **1**: la solución es

$$v(x) = e^{-x^2/4} \int_0^x e^{s^2/4}\, ds + 4e^{-x^2/4}.$$

d. Utilizando los resultados de las preguntas **b** y **c**, la única solución de (E) es $y(x) = -\frac{1}{v(x)}$ con $v(x) = e^{-x^2/4} \int_0^x e^{s^2/4}\, ds + 4e^{-x^2/4}$, es decir

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{4e^{-x^2/4} + e^{-x^2/4} \int_0^x e^{s^2/4}\, ds}}.$$