Tarea 2 : para entregar el 05/05

2016-I — Florent Schaffhauser

El propósito de la tarea es explicitar la estructura de álgebra graduada de $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$ para todo entero $n \geq 1$ y dar una aplicación del resultado.

Se recuerda que, como $\mathbb{R}$-espacio vectorila, $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$ es de dimensión $n+1$. Más precisamente,

$$H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } j = 2k, 0 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En particular el polinomio de Poincaré de $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$ es $P_t(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) = 1 + t^2 + t^4 + \ldots + t^{2n}$. Se recuerda también que $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ es una variedad diferenciable compacta conexa y orientable de dimensión $2n$. A continuación se fija una orientación de $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$.

1. Sea $k \in \{2; \ldots ; n\}$ y $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_k) \setminus \{0\}$. Utilizando el corchete de dualidad de Poincaré

$$(\,\cdot\,|\,\cdot\,) : \begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_k) \times H^{2k-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}_k} \alpha \wedge \beta \end{array}$$

mostrar que si $x^{k-1} \neq 0$, entonces $x^k \neq 0$.

Indicación: Mostrar primero que $(x|x^{k-1}) \neq 0$.

2. Se denota $i_k : \mathbb{C}\mathbf{P}_k \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}_n$ la inclusión canónica de $\mathbb{C}\mathbf{P}_k$ en $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ (inducida por las inclusiones habituales $\{1\} = \mathbb{C}\mathbf{P}_0 \subset \mathbb{C}\mathbf{P}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{C}\mathbf{P}_{n-1} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}_n$).

a. Recordar por qué, para todo entero $j \leq 2k$, i_k induce un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$i_k^*|_{H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)} : H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \xrightarrow{\simeq} H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_k).$$

b. Sea $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \setminus \{0\}$. Mostrar que, parar todo entero $k \in \{1; \ldots ; n\}$, $x^k \neq 0$.

Indicación: Si $n \geq 2$, utilizar la pregunta **1** para $k_0 \in \{2; \ldots ; n\}$ tal que $x^{k_0} = 0$ y $x^{k_0 - 1} \neq 0$.

3. Deducir de lo anterior que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \simeq \mathbb{R}[T]/ < T^{n+1} >$$

vía el cual la clase de T es enviada a un elemento de grado 2 en $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$.

Indicación: Fijando un elemento cualquiera $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \setminus \{0\}$, mostrar que existe un único homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\varphi_x : \mathbb{R}[T] \longrightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$ tal que $\varphi_x(T) = x$. Mostrar que tal φ_x es sobreyectivo y que $\ker \varphi_x$ es el ideal generado por T^{n+1} en el álgebra de polinomios $\mathbb{R}[T]$.

4. Mostrar que las variedades $S_2 \times S_4$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}_3$ tienen los mismos números de Betti y el mismo grupo fundamental pero que no son difeomorfas.

Indicación: Utilizar la fórmula de Künneth y mostrar que no existe un homomorfismo de álgebras graduadas inyectivo

$$\mathbb{R}[u_2]/ < u_2^2 > \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[u_4]/ < u_4^2 > \longrightarrow \mathbb{R}[x_2]/ < x_2^4 >$$

donde $\operatorname{gdo} u_j = j$ y $\operatorname{gdo} x_2 = 2$.

Bono. Dar un ejemplo de elemento $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \setminus \{0\}$.