Solución de la segunda tarea

2016-I Florent Schaffhauser

1. Ya que la variedad $\mathbb{C}\mathbf{P}_k$ es compacta y orientable, el corchete $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ es una aplicación bilineal no degenerada (para cualquier elección de orientación en $\mathbb{C}\mathbf{P}_k$). Y, como $\dim H^{2k-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_k) = 1$ y $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_k) \setminus \{0\}$, la condición $x^{k-1} \neq 0$ implica $(x|x^{k-1}) \neq 0$, pues de otro modo se tendría $(x|y) = 0$ para todo $y = \lambda x^{k-1} \in H^{2k-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_k)$, lo cual contradiría que $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ es no degenerada. Luego, ya que $(x|x^{k-1}) = \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}_k} x \wedge x^{k-1} dx = \int_{\mathbb{C}\mathbf{P}_k} x^k = (1|x^k)$, tenemos $x^k \neq 0$ (o si no $(1|x^k)$ sería nulo).

2. a. Es suficiente mostrar que $i^*_{n-1}|_{H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)}$ es un isomorfismo para $j \leq 2n-2$. Ya que $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ es compacto y $\mathbb{C}\mathbf{P}_n \setminus \mathbb{C}\mathbf{P}_{n-1} \simeq \mathbb{C}^n$, tenemos una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow H^j_c(\mathbb{C}^n) \longrightarrow H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \overset{i^*_{n-1}|_{H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)}}{\longrightarrow} H^j(\mathbb{C}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow H^{j+1}_c(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \ldots$$

con $H^j_c(\mathbb{C}^n) = 0$ para $j \leq 2n-1$.

b. Notemos primero que $x^{n+1} \in H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) = 0$. Y notemos también que si $n = 1$, no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $n \geq 2$ y que existe $k_0 \in \{2; \ldots; n\}$ tal que $x^{k_0} = 0$ y $x^{k_0-1} \neq 0$ en $H^{2k_0-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$. Utilizando el isomorfismo $i^*_{k_0-1}|_{H^{2k_0-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)}$: $H^{2k_0-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \xrightarrow{\simeq} H^{2k_0-2}(\mathbb{C}\mathbf{P}_{k_0})$, eso contradice la pregunta **1**. Por lo tanto, para todo $k \in \{2; \ldots; n\}$, $x^k \neq 0$.

3. Sea $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \setminus \{0\}$. Por la propiedad universal del álgebra de polinomios $\mathbb{R}[T]$, existe un único homomorfismo de álgebras $\varphi_x : \mathbb{R}[T] \longrightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$ tal que $\varphi_x(T) = x$. En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_x(T^k) = \varphi_x(T)^k = x^k$ y, puesto que, para todo entero $k \leq n$, el vector x^k es una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$, el homomorfismo φ_x es sobreyectivo. Además, ya que $x^{n+1} = 0$, tenemos $< T^{n+1} > \subset \ker \varphi_x$. Supongamos ahora que $P \in \ker \varphi_x$ y escribamos $P = QT^{m+1} + R$ con $R = a_n T^n + \ldots + a_0$ (por división euclidiana en $\mathbb{R}[T]$). Entonces $\varphi_x(P) = \varphi_x(R) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Ya que $a_k x^k \in H^{2k}(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$, con $x_k \neq 0$ por la pregunta anterior, la condición $\varphi_x(P) = 0$ implica que, para todo $k \in \{0; \ldots; n\}$, $a_k = 0$, es decir que $P = QT^{n+1} \in < T^{n+1} >$ y φ_x induce un isomorfismo

$$\mathbb{R}[T]/ < T^{n+1} > \xrightarrow{\simeq} H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n), \ \mathrm{cl}(T) \longmapsto x,$$

donde x en efecto tiene grado 2 en $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_n)$.

4. Ya que S_2 es compacta, podemos aplicar la fórmula de Künneth, la cual nos dice que existe un isomorfismo de álgebras graduadas

$$H^*(S_2 \times S_4) \simeq H^*(S_2) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(S_4) \simeq \mathbb{R}[u_2]/ < u_2^2 > \otimes\, \mathbb{R}[u_4]/ < u_4^2 >,$$

donde $\mathrm{gdo}\, u_j = j$. En particular,

$$P_t(S_2 \times S_4) = P_t(S_2)\, P_t(S_4) = (1+t^2)(1+t^4) = 1 + t^2 + t^4 + t^6 = P_t(\mathbb{C}\mathbf{P}_3),$$

es decir que las variedades $S_2 \times S_4$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}_3$ tienen los mismos números de Betti. También tienen el mismo grupo fundamental pues ambas son simplemente conexas. Sin embargo, no son difeomorfas (ni siquiera homeomorfas) pues las álgebras graduadas $H^*(S_2 \times S_4) \simeq \mathbb{R}[u_2]/ < u_2^2 > \otimes\, \mathbb{R}[u_4]/ < u_4^2 >$ y $H^*(\mathbb{C}\mathbf{P}_3) \simeq \mathbb{R}[x_2]/ < x_2^4 >$ no son isomorfas. En efecto, un homomorfismo de álgebras graduadas

$$\psi : \mathbb{R}[u_2]/ < u_2^2 > \otimes\, \mathbb{R}[u_4]/ < u_4^2 > \longrightarrow \mathbb{R}[x_2]/ < x_2^4 >$$

tiene que enviar u_2 a λx_2 y u_2^2 a $(\lambda x_2)^2 = \lambda^2 x_2^2$. Pero $u_2^2 = 0$ y $x_2^2 \neq 0$, así que $\lambda = 0$ y ψ no es inyectivo.

Bono. Un ejemplo de elemento $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbf{P}_n) \setminus \{0\}$ está dado por el dual de Poincaré en $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$ de la sub-variedad compacta $(2n-2)$-dimensional $\mathbb{C}\mathbf{P}_{n-1}$.