Tarea 1 : para entregar el 25/02

En todo el enunciado, se denota A un anillo conmutativo unitario y $A-\mathrm{mod}$ la categoría de A-módulos.

Ejercicio 1. `(4 puntos)` Sea M un A-módulo. Se consideran los funtores covariantes

$$F: \begin{array}{ccc} A-\mathrm{mod} & \longrightarrow & A-\mathrm{mod} \\ N & \longmapsto & N\otimes M \end{array} \quad \text{y} \quad G: \begin{array}{ccc} A-\mathrm{mod} & \longrightarrow & A-\mathrm{mod} \\ N & \longmapsto & \mathrm{Hom}(M;N) \end{array}.$$

Mostrar que, si N_1 y N_2 son dos A-módulos cualesquiera, entonces existe un isomorfismo natural de A-módulos

$$\mathrm{Hom}(N_1\otimes M; N_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(N_1; \mathrm{Hom}(M; N_2)).$$

Ejercicio 2. `(4 puntos)` Sea φ el homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M;A)\otimes N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M;N) \\ \xi\otimes n & \longmapsto & (m\longmapsto \xi(m)n) \end{array}$$

Mostrar que si M o N es libre de tipo finito, entonces el homomorfismo φ es un isomorfismo.

Ejercicio 3. Sea

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de A-módulos y sea $(\mathcal{C}=\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n, \partial=\oplus_{n\in\mathbb{N}}\partial_n)$ un complejo de A-módulos libres (donde, para todo entero $n\geq 1$, $\partial_n:\mathcal{C}_n\longrightarrow\mathcal{C}_{n-1}$ y $\partial_0=0$).

a. `(4 puntos)` Mostrar que lo anterior induce una sucesión exacta corta de complejos

$$0\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_1\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_2\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_3\longrightarrow 0.$$

b. `(2 puntos)` Deducir del punto anterior que existe un homomorfismo natural β y una sucesión exacta larga de A-módulos

$$\ldots\longrightarrow H_1(\mathcal{C};M_3)\xrightarrow{\beta} H_0(\mathcal{C};M_1)\longrightarrow H_0(\mathcal{C};M_2)\longrightarrow H_0(\mathcal{C};M_3)\longrightarrow 0$$

y precisar la definición del homomorfismo β (llamado homomorfismo de Bockstein).

c. `(4 puntos)` De forma similar a lo que se hizo en **a**, mostrar que existe una sucesión exacta corta de complejos

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_1)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_2)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_3)\longrightarrow 0.$$

d. `(2 puntos)` Deducir del punto anterior que existe un homomorfismo natural β y una sucesión exacta larga de A-módulos

$$0\longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_1)\longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_2)\longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_3)\xrightarrow{\beta} H^1(\mathcal{C};M_1)\longrightarrow\ldots$$

y precisar la definición del homomorfismo β (llamado homomorfismo de Bockstein).