Solución de la primera tarea

2016-I Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Se trata de definir, dado un par de A-módulos (N_1, N_2), un isomorfismo de A-módulos

$$\varphi_{(N_1,N_2)} : \mathrm{Hom}(F(N_1); N_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(N_1; G(N_2))$$

que sea natural en el siguiente sentido: si denotamos $\mathcal{C}$ la categoría de A-módulos y $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ la categoría opuesta, φ es una transformación natural entre los funtores (covariantes)

$$A : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (N_1, N_2) & \longmapsto & \mathrm{Hom}(F(N_1); N_2) \end{array} \quad \text{y} \quad B : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (N_1, N_2) & \longmapsto & \mathrm{Hom}(N_1; G(N_2)) \end{array}$$

es decir, tal que si $f : N_1' \longrightarrow N_1$ y $g : N_2 \longrightarrow N_2'$ son homomorfismos de A-módulos, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F(N_1); N_2) & \xrightarrow{A(f,g)} & \mathrm{Hom}(F(N_1'); N_2') \\ \big\downarrow \varphi_{(N_1,N_2)} & & \big\downarrow \varphi_{(N_1,N_2)} \\ \mathrm{Hom}(N_1; G(N_2)) & \xrightarrow{B(f,g)} & \mathrm{Hom}(N_1', G(N_2')). \end{array}$$

Cuando existen tales isomorfismos naturales

$$\varphi_{(N_1,N_2)} : \mathrm{Hom}(F(N_1); N_2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(N_1; G(N_2)),$$

se dice que los funtores F y G son funtores adjuntos el uno del otro y esto es lo que estamos demostrando aquí para los funtores $F(N) = N \otimes M$ y $G(N) = \mathrm{Hom}(M; N)$.

Para simplificar la notación, escribiremos φ en lugar de $\varphi_{(N_1,N_2)}$. Definamos entonces

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(N_1 \otimes M; N_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(N_1; \mathrm{Hom}(M; N_2)) \\ f & \longmapsto & \big(n_1 \mapsto (m \mapsto f(n_1 \otimes m))\big) \end{array}$$

y

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(N_1; \mathrm{Hom}(M; N_2)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(N_1 \otimes M; N_2) \\ g & \longmapsto & \big((n_1 \otimes m) \mapsto (g(n_1))\,(m)\big) \end{array}$$

Ahora es una simple verificación mostrar que φ es un homomorfismo natural de A-módulos y que ψ es un inversos para φ.

Ejercicio 2. Vamos a mostrar que si M o N es libre de tipo finito, entonces el homomorfismo A-módulos

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M; A) \otimes N & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M; N) \\ \xi \otimes n & \longmapsto & (m \longmapsto \xi(m)n) \end{array}$$

es un isomorfismo, definiendo en cada caso un inverso para φ.

Supongamos primero que $M \simeq \oplus_{i=1}^r Ae_i$ (con $Ae_i \simeq A$ como A-módulo) y denotemos $(e_i^*)_{1 \leq i \leq r}$ la base dual de $M^* := \mathrm{Hom}(M; A)$. Entonces, si $f \in \mathrm{Hom}(M; N)$, se tiene, para todo $x \in M$, $x = \sum_{i=1}^r e_i^*(x) e_i$ y $f(x) = \sum_{i=1}^r e_i^*(x) f(e_i)$. Luego se pone

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M; N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M; A) \otimes N \\ f & \longmapsto & \sum_{i=1}^r e_i^* \otimes f(e_i) \end{array}$$

y se verifica que ψ es un homomorfismo inverso para φ. En efecto, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ sigue de la definición de ψ y, si calculamos $(\psi \circ \varphi)(\xi \otimes n)$, viene

$$(\psi \circ \varphi)(\xi \otimes n) = (\psi \circ \varphi)\big((\sum_{i=1}^r e_i^*(\xi) e_i) \otimes n\big) = \sum_{i=1}^r \xi(e_i)(\psi \circ \varphi)(e_i^* \otimes n)$$

pero, si $f = \varphi(e_i^* \otimes n)$, entonces $f(e_j) = n$ si $j = i$ y 0 si $j \neq i$, luego $(\psi \circ \varphi)(e_i^* \otimes n) = e_i^* \otimes f(e_i) = e_i^* \otimes n$, de modo que para todo $\xi \in M^*$ y todo $n \in N$, $(\psi \circ \varphi)(\xi \otimes n) = \xi \otimes n$. Ya que los tensores simples $\xi \otimes n$ generan $M^* \otimes N$, lo anterior implica $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$.

Supongamos ahora que $N \simeq \oplus_{i=1}^r Ae_i$ (con $Ae_i \simeq A$ como A-módulo) y denotemos $(e_i^*)_{1\le i\le r}$ la base dual de N^*. Entonces, si $f \in \mathrm{Hom}(M;N)$, se tiene, para todo $x \in N$, $f(x) = \sum_{i=1}^r e_i^*(f(x))e_i$. Luego se pone

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M;N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M;A)\otimes N \\ f & \longmapsto & \sum_{i=1}^r (e_i^*\circ f)\otimes e_i \end{array}$$

y se verifica que ψ es un homomorfismo inverso para φ. En efecto, $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}$ sigue otra vez de la definición de ψ y, si calculamos $(\psi\circ\varphi)(\xi\otimes n)$, viene ahora

$$(\psi\circ\varphi)(\xi\otimes n) = (\psi\circ\varphi)\big(\xi\otimes(\sum_{i=1}^r e_i^*(n)e_i)\big) = \sum_{i=1}^r e_i^*(n)\,(\psi\circ\varphi)(\xi\otimes e_i).$$

Pero, si $f = \varphi(\xi\otimes e_i)$, entonces para todo $x\in M$, $(e_i^*\circ f)(x) = \xi(x)$, luego $(\psi\circ\varphi)(\xi\otimes e_i) = \xi\otimes e_i$ y podemos concluir como anteriormente que $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}$.

Ejercicio 3.

a. Por definición del operador de borde en los complejos $\mathcal{C}\otimes M_j$ para $j = 1,2,3$, a saber

$$\mathrm{Id}\otimes\partial_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n\otimes M_j & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1}\otimes M_j \\ c\otimes m & \longmapsto & \partial_n c\otimes m \end{array}$$

tenemos una sucesión de homomorfismos de complejos (de cadenas)

$$0\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_1\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_2\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_3\longrightarrow 0, \tag{1}$$

es decir una sucesión de diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_n\otimes M_1) & \longrightarrow & \mathcal{C}_n\otimes M_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}_n\otimes M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1}\otimes M_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1}\otimes M_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1}\otimes M_3 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Decir que la sucesión de homomorfismos de complejos (1) es exacta significa que, para todo $n\in\mathbb{N}$, la sucesión de homomorfismos de módulos

$$0\longrightarrow \mathcal{C}_n\otimes M_1\longrightarrow \mathcal{C}_n\otimes M_2\longrightarrow \mathcal{C}_n\otimes M_3\longrightarrow 0 \tag{2}$$

es exacta. Daremos primero una demostración directa bajo la hipótesis (del enunciado) que $\mathcal{C}_n$ libre.

En tal caso, existe un isomorfismo $\mathcal{C}_n \simeq \oplus_{i\in I} Ae_i$ (con $Ae_i\simeq A$ como A-módulo). Notemos entonces que $(Ae_i)\otimes M\simeq M$. Por lo tanto, para cualquier A-módulo M,

$$\mathcal{C}_n\otimes M = (\bigoplus_{i\in I} Ae_i)\otimes M = \bigoplus_{i\in I}((Ae_i)\otimes M) = M^{(I)}\text{[1]}.$$

Ya que la sucesión

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos (por una verificación directa[2]) que la sucesión

$$0\longrightarrow M_1^{(I)}\longrightarrow M_2^{(I)}\longrightarrow M_3^{(I)}\longrightarrow 0 \tag{3}$$

es exacta, lo cual demuestra la exactitud de (2) (y por lo tanto de (1)).

Para una segunda demostración de la exactitud de (2), ver la discusión al final de este documento.

b. Por definición, $H_k(\mathcal{C};M_j) := H_k(\mathcal{C}\otimes M_j)$, así que la sucesión exacta

$$\ldots\longrightarrow H_1(\mathcal{C};M_3)\xrightarrow{\beta} H_0(\mathcal{C};M_1)\longrightarrow H_0(\mathcal{C};M_2)\longrightarrow H_0(\mathcal{C};M_3)\longrightarrow 0$$

es simplemente la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta de complejos

$$0\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_1\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_2\longrightarrow \mathcal{C}\otimes M_3\longrightarrow 0$$

del inciso **a**, con β el homomorfismo de conexión (en particular, β es un homomorfismo natural).

---

[1] $M^{(I)}$ es el A-módulo de aplicaciones con soporte finito de I a M, también se denota $\oplus_{i\in I}M$.

[2] En caso de duda, ver la discusión sobre módulos proyectivos al final de este documento.

c. Por definición del operador de borde en los complejos $\mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_j)$ para $j=1,2,3$, a saber

$$d_{n+1} := \partial^t_{n+1} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_j) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_{n+1};M_j) \\ u & \longmapsto & u\circ\partial_{n+1} \end{array}$$

(para $j=1,2,3$) tenemos una sucesión de homomorfismos de complejos (de co-cadenas)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_3) \longrightarrow 0, \tag{4}$$

es decir una sucesión de diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_3) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_{n+1};M_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_{n+1};M_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_{n+1};M_3) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Decir que la sucesión de homomorfismos de complejos (4) es exacta significa que, para todo $n\in\mathbb{N}$, la sucesión de homomorfismos de módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M_3) \longrightarrow 0 \tag{5}$$

es exacta. Daremos primero una demostración directa bajo la hipótesis (del enunciado) que $\mathcal{C}_n$ libre.

En tal caso, existe un isomorfismo $\mathcal{C}_n \simeq \oplus_{i\in I}Ae_i$ (con $Ae_i \simeq A$ como A-módulo). Notemos entonces que $\mathrm{Hom}(Ae_i;M)\simeq M$. Por lo tanto, para cualquier A-módulo M,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n;M) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} Ae_i;M) = \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(Ae_i;M) = M^I\,[3].$$

Ya que la sucesión

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos (por una verificación directa[4]) que la sucesión

$$0 \longrightarrow M_1^I \longrightarrow M_2^I \longrightarrow M_3^I \longrightarrow 0 \tag{6}$$

es exacta, lo cual demuestra la exactitud de (5) (y por lo tanto de (4)). Para una segunda demostración de la exactitud de (5), ver la discusiíon al final de este documento.

d. Por definición, $H^k(\mathcal{C};M_j) := H^k(\mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_j))$, así que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_1) \longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_2) \longrightarrow H^0(\mathcal{C};M_3) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathcal{C};M_1) \longrightarrow \dots$$

es simplemente la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C};M_3) \longrightarrow 0$$

del inciso **c**, con β el homomorfismo de conexión (en particular, β es un homomorfismo natural).

Discusión de las nociones encontradas en los incisos* 3.a *y* 3.c *de esta tarea

Módulos proyectivos. Para una segunda demostración de la exactitud de (5), uno puede demostrar primero el siguiente hecho: si una sucesión de homomorfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \tag{7}$$

es exacta, entonces, para cualquier A-módulo M, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M;M_1) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}(M;M_2) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}(M;M_3) \tag{8}$$

es exacta: si $h\in\mathrm{Hom}(M;M_1)$ es tal que $f\circ h=0$, la inyectividad de f implica $h=0$ y, si $h\in\mathrm{Hom}(M;M_2)$ es tal que $g\circ h=0$ entonces, el hecho de que $\ker g = \mathrm{Im}\, f$ implica que existe $\widetilde{h}: M\longrightarrow M_1$ tal que $f\circ\widetilde{h}=h$ es decir que $h\in\mathrm{Im}\,(f\circ -)$ (notemos que, por inyectividad de f, el homomorfismo $\widetilde{h}$ tal que $f\circ\widetilde{h}=h$ es único). Ya que la inclusión $\mathrm{Im}(f\circ -)\subset\ker(g\circ -)$ sigue directamente del hecho de que $\mathrm{Im}\, f\subset\ker g$, lo anterior implica que, en efecto, $\mathrm{Im}(f\circ -)=\ker(g\circ -)$. La propiedad general que acabamos de demostrar es que, para cualquier M, el funtor $\mathrm{Hom}(M;-)$ es exacto a la izquierda.

[3] M^I es el A-módulo de aplicaciones de I a M, también se puede denotar $\prod_{i\in I} M$.

[4] En caso de duda, ver la discusión sobre módulos proyectivos al final de este documento.

Ahora *el problema es ver bajo qué hipótesis la sobreyectividad de* $g : M_2 \longrightarrow M_3$ *en* (7) *implica la sobreyectividad de* $g \circ -$: $\mathrm{Hom}(M; M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M; M_3)$ en (8). De manera equivalente, esto se puede formular como un problema universal de la siguiente sugestiva manera:

(9)
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\exists\, \widetilde{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\ M_2 \arrow[r, "g"] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si M es tal que se cumple esta propiedad, se dice que M es un módulo *proyectivo*. Entonces el presente ejercicio **3.c** se vuelve a formular diciendo que hay que mostrar que si M es un módulo libre, entonces M es proyectivo. Supongamos entonces que $M \simeq \oplus_{i \in I} A e_i$. Ya que g es sobreyectiva, se tiene que, para todo $i \in I$, existe $x_i \in M_2$ tal que $g(x_i) = h(e_i)$ y podemos definir un *homomorfismo*[5] *de* A*-módulos* $\widetilde{h} : M \longrightarrow M_2$ por $\widetilde{h}(e_i) = x_i$, lo cual termina la demostración y la discusión sobre el punto **3.c** de esta tarea.

Módulos inyectivos. Un tema relacionado puede ser mostrar que, para cualquier M, el funtor $\mathrm{Hom}(\,-\,; M)$ es exacto a la derecha, es decir que si

(10)
$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

es exacta entonces

(11)
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3; M) \xrightarrow{-\circ g} \mathrm{Hom}(M_2; M) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}(M_1; M)$$

es exacta[6], luego estudiar la noción de módulo *inyectivo* (que se obtiene invirtiendo las flechas en un diagrama de tipo (9))

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M_2 \arrow[dl, dashed, "\exists\, \widetilde{h}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

para mostrar que, para M inyectivo, la propiedad $f : M_1 \longrightarrow M_2$ inyectiva implica que $-\circ f : \mathrm{Hom}(M_2; M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1; M)$ es sobreyectivo. Esto es simplemente *por definición* y no nos da ejemplos de módulos inyectivos (antes lo que demostramos fue que los módulos libres eran ejemplos de módulos proyectivos). Para dar ejemplos, demostremos entonces que los módulos libres *de tipo finito* son inyectivos: sea M libre de tipo finito, entonces por un lado el módulo dual M^* es libre (de tipo finito pero no importa aquí) y en particular el funtor $M^* \otimes -$ es exacto (por el punto **3.a**) y por otro lado, para cualquier módulo M_j, tenemos un isomorfismo natural $M^* \otimes M_j \simeq \mathrm{Hom}(M; M_j)$ (cf Ejercicio **2**, la naturalidad del isomorfismo siendo sencilla de verificar), por lo tanto, si M es libre de tipo finito, el funtor $\mathrm{Hom}(M; -)$ es exacto (es decir que M es inyectivo)[7].

Módulos planos. Volviendo a los módulos proyectivos (Diagrama (9)), vamos a demostrar el siguiente resultado, relacionado con el punto **3.a** de esta tarea: si M es un módulo proyectivo (no necesariamente libre), entonces el funtor $M \otimes -$ es exacto (cuando

[5]Nótese la diferencia con las demostraciones de exactitud de (3) y (6), donde solamente teníamos que definir *aplicaciones*. Lo que se demuestra en (3) es que una suma directa de sucesiones exactas cortas de A-módulos es una sucesión exacta corta de A-módulos y, de forma análoga, lo que se demuestra en (6) es que un producto de sucesiones exactas cortas de A-módulos es una sucesión exacta corta de A-módulos.

[6]Nótese que, en la sucesión exacta (11), el 0 aparece a la izquierda simplemente porque el funtor $\mathrm{Hom}(-; M)$ es contravariante; también pudimos escribir la sucesión (11) bajo la forma

$$\mathrm{Hom}(M_1; M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(M_2; M) \longleftarrow \mathrm{Hom}(M; M_3) \longleftarrow 0,$$

con el 0 a la derecha como en la sucesión (10).

[7]La demostración anterior es una caso interesante de utilización de la noción de dualidad: si M es libre de tipo finito, M es inyectivo si y solamente si su dual M^* es plano. Para más casos de esta dualidad entre módulos proyectivos y módulos planos, se puede consultar el libro *Relative Homological Algebra*, de Enochs y Jenda, Teorema 3.2.10 y Corolario 3.2.17.

este funtor es exacto, se dice que el módulo M es un módulo *plano*, así que estamos demostrando que un módulo proyectivo es plano).

La primera etapa es mostrar que, para cualquier M, el funtor $M \otimes -$ es exacto a la derecha, es decir que si la sucesión

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \tag{12}$$

es exacta entonces la sucesión

$$M \otimes M_1 \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes f} M \otimes M_2 \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes g} M \otimes M_3 \longrightarrow 0 \tag{13}$$

es exacta: si $m \otimes m_3 \in M \otimes M_3$, la sobreyectividad de $g : M_2 \longrightarrow M_3$ implica que existe $m_2 \in M_2$ tal que $g(m_2) = m_3$ luego $m \otimes m_3 = m \otimes g(m_2) = (\mathrm{Id} \otimes g)(m \otimes m_2)$, lo cual muestra que $\mathrm{Id} \otimes g$ es sobreyectiva, además, el hecho de que $g \circ f = 0$ implica que $(\mathrm{Id}\otimes g)\circ(\mathrm{Id}\otimes f) = \mathrm{Id}\otimes(g\circ f) = 0$, es decir que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f) \subset \ker(\mathrm{Id}\otimes g)$, y sólo falta mostrar que $\ker(\mathrm{Id}\otimes g) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)$. Para eso, observemos que las dos propiedades ya demostradas implican la existencia de un homomorfismo sobreyectivo $\overline{\mathrm{Id} \otimes g} : \frac{M\otimes M_2}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)} \longrightarrow M \otimes M_3$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \otimes M_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes g"] \arrow[d, "p"'] & M \otimes M_3 \\ \frac{M\otimes M_2}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)} \arrow[ur, "\overline{\mathrm{Id}\otimes g}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir tal que $(\overline{\mathrm{Id} \otimes g}) \circ p = \mathrm{Id} \otimes g$, donde $p : M \otimes M_2 \longrightarrow \frac{M\otimes M_2}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)}$ es la proyección canónica. Para concluir es suficiente mostrar que $\overline{\mathrm{Id} \otimes g}$ es un isomorfismo, pues eso implica que si $x \in \ker(\mathrm{Id} \otimes g)$, tenemos $(\mathrm{Id} \otimes g)(x) = 0$ en $M \otimes M_3$, luego

$$\overline{(\mathrm{Id} \otimes g)}^{-1} \circ (\mathrm{Id} \otimes g)(x) = 0 \text{ en } \frac{M \otimes M_2}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} \otimes f)}.$$

Pero

$$(\overline{\mathrm{Id} \otimes g})^{-1} \circ (\mathrm{Id}\otimes g)(x) = \overline{\mathrm{Id} \otimes g}^{\,-1} \circ ((\overline{\mathrm{Id} \otimes g}) \circ p)(x) = \big((\overline{\mathrm{Id} \otimes g})^{-1} \circ (\overline{\mathrm{Id} \otimes g})\big) \circ p(x) = p(x)$$

y $p(x) = 0$ implica $x \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)$, lo cual terminará la demostración de que, para cualquier M, el funtor $M \otimes -$ es exacto a la derecha, una vez hayamos demostrado que $\overline{\mathrm{Id} \otimes g}$ sí es invertible. Construyamos entonces un inverso: si $m \otimes m_3 \in M \otimes M_3$, el hecho de que g es sobreyectiva implica (como antes) la existencia de $m_2 \in M_2$ tal que $m_3 = g(m_2)$, luego $m \otimes m_3 = (\mathrm{Id} \otimes g)(m \otimes m_2)$. Si $m_2' \in M_2$ es otro elemento tal que $g(m_2') = m_3 = g(m_2)$, entonces $(m_2' - m_2) \in \ker g \subset \mathrm{Im}\, f$, luego, ya que los tensores simples generan $M \otimes M_3$, tenemos un homomorfismo de A-módulos bien definido

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M \otimes M_3 & \longrightarrow & \frac{M\otimes M_2}{\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}\otimes f)} \\ m \otimes g(m_2) & \longmapsto & (m \otimes m_2) + \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} \otimes f) \end{array}$$

y se verifica inmediatamente que es un inverso para $\mathrm{Id} \otimes g$.

La segunda etapa en nuestra demostración que un módulo proyectivo es plano es mostrar que, si M es proyectivo, la inyectividad de $f : M_1 \longrightarrow M_2$ en (12) implica la inyectividad de $\mathrm{Id} \otimes f : M \otimes M_1 \longrightarrow M \otimes M_2$ en (13). Para obtener eso, se utiliza una caracterización equivalente de los módulos proyectivos: un A-módulo P es proyectivo si y solamente si es factor directo[8] de un módulo libre L (es decir que existe un módulo libre L y un sub-módulo $S \subset L$ tal que $L \simeq S \oplus P$). Para demostrarlo, supongamos primero que P es proyectivo y consideremos el módulo libre L con base en biyección con los elementos de P. Por la propiedad universal de los módulos libres, tenemos un homomorfismo canónico $\pi : L \longrightarrow P$ y ése admite una sección homomórfica $s : P \longrightarrow L$ evidente, por lo

[8]Eso implicará que si A es un anillo principal, entonces un A-módulo proyectivo es necesariamente libre, pues un sub-módulo de un módulo libre sobre un anillo principal es necesariamente libre.

cual $L \simeq \ker \pi \oplus P$. Recíprocamente, si tenemos L y S tal que L es libre y $L \simeq S \oplus P$, entonces, retomando el diagrama (9) con $M = P$, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\widetilde{h \circ \pi}"'] & P \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{h}"'] & \\ M_2 \arrow[r, "g"] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{h} := \widetilde{h \circ \pi} \circ s$ y la existencia del homomorfismo $\widetilde{h \circ \pi}$ tal que $g \circ \widetilde{h \circ \pi} = h \circ \pi$ (ambos son homomorfismos de L a M_3) se obtiene recordando *un hecho equivalente al Punto **3.c** de esta tarea* que es que un módulo libre cumple con la propiedad universal del diagrama (9): la existencia de ese diagrama entonces demuestra que P tiene esa misma propiedad universal, puesto que

$$g \circ \widetilde{h} = g \circ (\widetilde{h \circ \pi} \circ s) = (g \circ \widetilde{h \circ \pi}) \circ s = (h \circ \pi) \circ s = h \circ (\pi \circ s) = h,$$

es decir que P es proyectivo. Volvamos entonces a la demostración del hecho de que, si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ es inyectivo y M es proyectivo, el homomorfismo $\mathrm{Id}_M \otimes f : M \otimes M_1 \longrightarrow M \otimes M_2$ es inyectivo. Por lo visto anteriormente, existe L libre y $S \subset L$ tal que $L \simeq S \oplus M$. *Como, por el Punto **3.a** de esta tarea, ya sabemos que un módulo libre es plano*, tenemos que el homomorfismo $\mathrm{Id}_L \otimes f : L \otimes M_1 \longrightarrow L \otimes M_2$ es inyectivo. Entonces para concluir es suficiente demostrar que un módulo N de la forma $N \simeq \oplus_{i \in I} N_i$ es plano si y solamente si cada factor N_i es plano. Más precisamente, es suficiente demostrar que $\mathrm{Id}_N \otimes f : N \otimes M_1 \longrightarrow N \otimes M_2$ es inyectivo si y solamente si cada $\mathrm{Id}_{N_i} \otimes f : N_i \otimes M_1 \longrightarrow N_i \otimes M_2$ es inyectivo (después, esto se aplica al homomorfismo inyectivo $\mathrm{Id}_L \otimes f : L \otimes M_1 \longrightarrow L \otimes M_2$ y al factor directo M de L): si $N = \oplus_{i \in I} N_i$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \otimes M_1 \arrow[r, "\mathrm{Id}_N \otimes f"] \arrow[d, "\simeq"'] & N \otimes M_1 \arrow[d, "\simeq"'] \\ \bigoplus_{i \in I} (N_i \otimes M_1) \arrow[r, "\oplus_{i \in I} (\mathrm{Id}_{N_i} \otimes f)"] & \bigoplus_{i \in I} (N_i \otimes M_2) \end{tikzcd}$$

con columnas que son isomorfismos. Por lo tanto el homomorfismo en la fila de arriba es inyectivo si y solamente si el homomorfismo en la fila de abajo es inyectivo, lo cual es equivalente a decir que cada homomorfismo $\mathrm{Id}_{N_i} \otimes f$ es inyectivo. Eso termina la demostración.

En conclusión, vemos que, *si A no es principal*[9], puede haber módulos proyectivos no libres pero que, por ser proyectivos, ésos siguen siendo planos. Es interesante notar que la demostración de tal hecho utiliza que los módulos libres son planos (Punto **3.a** de esta tarea) así como la caracterización de los módulos proyectivos como factores directos de módulos libres, la cual utiliza que los módulos libres cumplen con la propiedad universal del diagrama (9) (que es una propiedad equivalente al Punto **3.c** de esta tarea).

Fin de la discusión

[9]Lo cual pone en tela de juicio la utilidad de la noción de módulo proyectivo a estas alturas del curso, pues para tener un ejemplo de módulo proyectivo no libre, necesitamos trabajar con un anillo de base no principal pero ninguno de nuestros anillos de coeficientes para homología y cohomología ha sido así.