Examen parcial

17 de marzo 2016 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $n \geq 1$ un entero y sea p un número primo. Sea $q \geq 1$ un entero relativamente primo a p y sea $\omega := e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

a. Mostrar que la expresión

$$[n] \cdot (z_1, z_2) := (\omega^n\, z_1, \omega^{qn}\, z_2)$$

(donde $[n] := n \mod p$) define una acción libre del grupo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre la esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. El cociente de esa acción se conoce como el *espacio lenticular* $L(p;q)$. Es una variedad diferenciable de dimensión 3 que es compacta y conexa.

b. Se recuerda que en S_3 tenemos las *coordenadas de Hopf*[1] (η, ξ_1, ξ_2), dadas por $\eta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $(\xi_1, \xi_2) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ y

$$\begin{cases} z_1 &= (\operatorname{sen}\eta)\, e^{i\xi_1} \\ z_2 &= (\cos\eta)\, e^{i\xi_2} \end{cases}$$

Utilizando que, en esas coordenadas, la forma de volumen estándar de S_3 es[2]

$$\alpha = (\operatorname{sen}\eta\, \cos\eta)\, d\eta \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2,$$

calcular la cohomolgía de de Rham de la variedad $L(p;q)$.

c. Calcular el grupo fundamental de $L(p;q)$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{H}$ el cuerpo de los cuaterniones y sea $\mathbb{H}^*$ el grupo de los cuaterniones invertibles. El espacio producto $\mathbb{H}^n$ tiene una estructura natural de espacio vectorial real de dimensión $4n$.

a. Mostrar que $\mathbb{H}^*$ actúa en $\mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ y que el cociente $\mathbb{H}\mathbf{P}_n := (\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{H}^*$ de esa acción es una variedad diferenciable compacta, conexa, de dimensión $4n$. Mostrar que $\mathbb{H}\mathbf{P}_1$ es difeomorfo a S_4 (la esfera 4-dimensional).

b. Utilizando la existencia, para $n \geq 1$, de un encaje $\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} \hookrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_n$, calcular la cohomología de de Rham de $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$. ¿Existe un difeomorfismo entre $\mathbb{H}\mathbf{P}_2$ y la esfera 8-dimensional S_8?

c. Mostrar que existe una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ $p : S_7 \longrightarrow S_4$ cuyas fibras todas son difeomorfas a S_3 pero que S_7 no es difeomorfa a $S_4 \times S_3$.

---

[1] Para obtenerlas, se puede por ejemplo escribir los coeficientes de una matriz $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ bajo la forma $a = \rho_1 e^{i\xi_1}$, $b = \rho_2 e^{i\xi_2}$ con $\rho_1, \rho_2 \geq 0$.

[2] Para mostrarlo, se utiliza que $x_1 = \cos\xi_1 \operatorname{sen}\eta$, $x_2 = \operatorname{sen}\xi_1 \operatorname{sen}\eta$, $x_3 = \cos\xi_2 \cos\eta$, $x_4 = \operatorname{sen}\xi_2 \cos\eta$ y $\alpha = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.