Solución del parcial

Ejercicio 1. a. Mostremos que la acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre $S_3 \subset \mathbb{C}^2$ definida por

$$[n] \cdot (z_1, z_2) = (\omega^n z_1, \omega^{qn} z_2)$$

es una acción libre. Si $[n] \cdot (z_1, z_2) = (z_1, z_2)$, entonces $\omega^n z_1 = z_1$ y $\omega^{qn} z_2 = z_2$. Como $z_1 \neq 0$ o $z_2 \neq 0$, tenemos $\omega^n = 1$ o $\omega^{qn} = 1$. Como $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ y $p \not| \, q$, tenemos $p \mid n$, es decir $[n] = 0$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b. Por definición, $L(p;q) = S_3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Como el grupo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ actúa de manera libre en la variedad compacta S_3, la proyección canónica $\pi : S_3 \longrightarrow S_3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ es un revestimiento finito de clase C^∞, el cual induce, para todo $k \in \mathbb{N}$, un isomorfismo

$$\pi^* : H^k(L(p;q)) \xrightarrow{\simeq} H^k(S_3)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

Ya que $H^k(S_3) = 0$ si $k \neq 0, 3$, tenemos $H^k(L(p;q)) = 0$ si $k \neq 0, 3$. Además $H^0(L(p;q)) = \mathbb{R}$, por conexidad de $L(p;q) = S_3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Finalmente, $H^k(S_3) = \mathbb{R}$ es generado por la clase de la forma de volumen estándar

$$\alpha = (\operatorname{sen}\eta \cos\eta) d\eta \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

(en las coordenadas de Hopf en S_3). Para determinar cómo actúa $[n] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre $[\alpha] \in H^3(S_3)$, escribamos la acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en S_3 en coordenadas de Hopf:

$$[n] \cdot (\eta, \xi_1, \xi_2) = \big(\omega^n (\operatorname{sen}\eta) e^{i\xi_1}, \omega^{qn} (\cos\eta) e^{i\xi_2}\big) = \big((\operatorname{sen}\eta) e^{i(\xi_1 + n\frac{2\pi}{p})}, (\cos\eta) e^{i(\xi_2 + qn\frac{2\pi}{p})}\big).$$

Luego

$$\begin{aligned}
[n] \cdot [\alpha] &= \left[(\operatorname{sen}\eta\cos\eta) d\eta \wedge d\left(\xi_1 - n\frac{2\pi}{p}\right) \wedge d\left(\xi_2 - qn\frac{2\pi}{p}\right)\right] \\
&= [(\operatorname{sen}\eta\cos\eta) d\eta \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2] \\
&= [\alpha].
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $H^3(S_3)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = H^3(S_3) = \mathbb{R}$.

c. Ya que S_3 es simplemente conexo y el grupo finito $Z/p\mathbb{Z}$ actúa de manera libre en S_3 que es compacto, tenemos

$$\pi_1(L(p;q)) = \pi_1(S_3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Es decir que el espacio lenticular tiene, para todo número primo p y para todo entero q relativamente primo a p, la misma cohomología de de Rham que S_3 pero no tiene el mismo grupo fundamental.

Ejercicio 2.

a. El grupo $\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} \mid q \neq 0\}$ actúa (de manera libre) en $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} = \{(q_0, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid (q_0, q_1, \ldots, q_n) \neq (0, \ldots, 0)\}$ pour multiplicación de las coordenadas. La construcción de un atlas diferenciable en el espcacio topológico cociente $\mathbb{H}\mathbf{P}_n = (\mathbb{H}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{H}^*$ (el cual es conexo pues $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ es conexo) es similar a lo que hace para los espacios proyectivos reales y complejos $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ y $\mathbb{C}\mathbf{P}_n$: en el abierto $U_i := \{[q_0 : \ldots : q_n] \in \mathbb{H}\mathbf{P}_n \mid q_i \neq 0\}$ se define el homeomorfismo

$$\varphi_i : [q_0 : \ldots : q_n] \longmapsto \left(\frac{q_0}{q_i}, \ldots, \widehat{\frac{q_i}{q_i}}, \ldots, \frac{q_n}{q_i}\right) \in H^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$$

y los cambios de carta son las aplicaciones C^∞

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (w_0, \ldots, \widehat{w_i}, \ldots, w_j, \ldots, w_n) \longmapsto \left(\frac{w_0}{w_j}, \ldots, \frac{1}{w_j}, \ldots, \widehat{\frac{w_j}{w_i}}, \ldots, \frac{w_n}{w_j}\right).$$

Por lo tanto, $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es una variedad diferenciable de dimensión $4n$. Además, la inclusión $S_{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{R}^{4n+4} \simeq \mathbb{H}^{n+1}$ y el difeomorfismo $\mathbf{SU}(2) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} \simeq S_3$ inducen un difeomorfismo $S_{4n+3}/S_3 \simeq \mathbb{H}\mathbf{P}_n$ (en el caso real $\mathbb{R}\mathbf{P}_n \simeq S_n/S_0$ y en el caso complejo $\mathbb{C}\mathbf{P}_n \simeq S_{2n+1}/S_1$). En particular $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es compacto. Para $n = 1$, tenemos

$$\mathbb{H}\mathbf{P}_1 = \{[q_0 : q_1] \mid q_1 \neq 0\} \cup \{[1:0]\} \simeq \mathbb{R}^4 \cup \{\mathrm{pt}\} \simeq S_4$$

(en el caso real $\mathbb{R}\mathbf{P}_1 \simeq S_1/S_0 \simeq S_1$ y en el caso complejo $\mathbb{C}\mathbf{P}_1 \simeq S_3/S_1 \simeq S_2$; aquí $\mathbb{H}\mathbf{P}_1 \simeq S_7/S_3$). Un difeomorfismo explícito $\mathbb{H}\mathbf{P}_1 \xrightarrow{\simeq} S_4$ se puede obtener utilizando el difeomorfismo $(\mathbb{H}\mathbf{P}_1 \setminus \{[0:1]\}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\simeq} S_4 \setminus \{p_N\}$ donde $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\simeq} S_4 \setminus \{p_N\}$ es la inversa de la proyección estereográfica de polo $p_N := (0,0,0,0,1) \in S_4$.

b. Si $n \geq 1$, un encaje $\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} \hookrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_n$ está dado por $[q_0 : \ldots : q_{n-1}] \hookrightarrow [q_0 : \ldots : q_{n-1} : 0]$. Vamos a utilizar eso para demostrar por inducción que

$$H^k(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 4j, 0 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En particular, el polinomio de Poincaré de $H^*(\mathbb{H}\mathbf{P}_n)$ es

$$P_t(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) = 1 + t^4 + t^8 + \ldots + t^{4n}.$$

Notemos primero que $\mathbb{H}\mathbf{P}_0 = \{\mathrm{pt}\}$, así que la hipótesis de inducción se cumple en el rango $n = 0$. Sea ahora $n \geq 1$ y supongamos que la hipótesis de inducción se cumple en el rango $(n-1)$. La sucesión exacta largar del par $(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1})$ se escribe así

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow H^0(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow H^0(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \longrightarrow H^0(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \\
\longrightarrow H^1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow H^1(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \longrightarrow H^1(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \\
\longrightarrow H^2(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H^{4n-1}(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \\
\longrightarrow H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \longrightarrow H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ya que la variedad $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es compacta, tenemos isomorfismos $H^k(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \simeq H^k_c(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1})$. Pero

$$\mathbb{H}\mathbf{P}_n \setminus \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} = \{[q_0 : \ldots : q_n] \mid q_n \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^{4n}$$

y

$$H^k_c(\mathbb{R}^{4n}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 4n, \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 4n \end{cases}$$

Ya que $\dim \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} = 4n-4$, tenemos $H^{4n-1}(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) = H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) = 0$ luego, por la sucesión exacta anterior,

$$H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \simeq H^{4n}(\mathbb{H}\mathbf{P}_n, \mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}) \simeq H^{4n}_c(\mathbb{R}^{4n}) = \mathbb{R}.$$

Ya que $\mathbb{H}\mathbf{P}_n$ es conexo y $\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1} \neq \emptyset$, el homomorfismo $H^0(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \longrightarrow H^0(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1}$ en la sucesión exacta anterior es sobreyectivo. Y como además $H^k_c(\mathbb{R}^{4n}) = 0$ si $k < 4n$, tenemos isomorfismos $H^k(\mathbb{H}\mathbf{P}_n) \simeq H^k(\mathbb{H}\mathbf{P}_{n-1})$ para todo $k \in \{0; \ldots; 4n-1\}$. Utilizando la hipótesis de inducción en el rango $(n-1)$, concluimos que ésa es cierta también en el rango n, lo cual completa la inducción. En particular, $H^4(\mathbb{H}\mathbf{P}_2) = \mathbb{R} \neq 0 = H^4(S_8)$, así que $\mathbb{H}\mathbf{P}_2$ no es difeomorfo (ni siquiera homeomorfo...) a S_8.

c. Recordemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un difeomorfismo $S_{4n+3}/S_3 \simeq \mathbb{H}\mathbf{P}_n$, donde el grupo compacto $S_3 \simeq \mathbf{SU}(2)$ actúa librement en S_{4n+3}. En particular, existe una fibración localmente trivial $p : S_{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}\mathbf{P}_n$, de fibra típica S_3. Utilizando el resultado de la pregunta **a**, eso da, para $n = 1$, una fibración localmente trivial $p : S_3 \longrightarrow S_4$, de fibra típica S_3, algo que en general se representa así:

$$S_3 \longrightarrow S_7 \longrightarrow S_4$$

(nótese que es una fibración "de esferas por esferas", como $S_1 \longrightarrow S_3 \longrightarrow S_2$ y $S_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_1$). Esta fibración no es cohomológicamente trivial, pues, por a fórmula de Künneth,

$$H^*(S_4 \times S_3) \simeq H^*(S_4) \rtimes H^3(S_3),$$

luego el polinomio de Poincaré de $S_4 \times S_3$ es

$$P_t(S_4 \times S_3) = P_t(S_4)\, P_t(S_3) = (1+t^4)(1+t^3) = 1 + t^3 + t^4 + t^7 \neq 1 + t^7 = P_t(S_7).$$

En particular, $S_4 \times S_3$ no es difeomorfo (ni siquiera homeomorfo) a S_7.