Hoja de ejercicios 3 : Dualidad de Poincaré, fórmula de Lefschetz

2016-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea M una variedad diferencial conexa y orientada, de dimensión n. Utilizando la dualidad de Poincaré $H^n(M) \simeq H^0_c(M)^*$, mostrar que M es compacta si y solamente si $H^n(M) \neq 0$ y que en ese caso $H^n(M) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sea M una variedad diferencial compacta conexa orientada y sin borde, de dimensión $n = 4k+2$. Sea $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k(M)$ su característica de Euler.
a. Mostrar que $\chi(M) = b_{2k+1}(M)$.
b. Mostar que $\chi(M)$ es par. *Indicación:* Mostrar que existe una forma bilineal antisimétrica no degenerada en $H^{2k+1}(M)$.

Ejercicio 3. Sea M una variedad diferencial compacta conexa orientada y sin borde, de dimensión $n = 4k$.
a. Mostar que el espacio $H^{2k}(M)$ está dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada Q_M.
b. Mostrar que la signatura/el índice de Q_M (llamado la signatura de M) es congruente a $\chi(M)$ módulo 2.
c. Mostrar que la signatura de $\mathbb{C}\mathbf{P}_2$ es igual a 1.

Ejercicio 4. Sea M una variedad diferencial compacta conexa orientada y sin borde. Sea $f : M \longrightarrow M$ una aplicación de clase C^∞.
a. Mostrar que f es homótopa a una una aplicación constante, entonces f tiene un punto fijo. *Indicación:* Utilizar la fórmula de Lefschetz para mostrar que el número de Lefschetz es $1 \neq 0$.
b. Mostrar que si $\chi(M) \neq 0$ y f es homótopa a Id_M, entonces f tiene un punto fijo.

Ejercicio 5. Sea $f : S_n \longrightarrow S_n$ una aplicación diferenciable de la esfera a sí misma. Sea $\mathrm{gr}(f)$ el grado de f y sea λ_f su número de Lefschetz.
a. Mostrar que $\lambda_f = 1 + (-1)^n \mathrm{gr}(f)$.
b. Deducir de lo anterior que si $\mathrm{gr}(f) \neq (-1)^{n+1}$, entonces f tiene un punto fijo.
c. Mostrar que si $\sigma : S_{2k} \longrightarrow S_{2k}$ es una involución sin puntos fijos, entonces σ revierte la orientación de S_{2k}. Dar un ejemplo de involución de S_2 que revierte la orientación pero tiene puntos fijos.
d. Mostrar que en S_{2k} no existe un campo vectorial que nunca se anule.

Ejercicio 6. Calcular $H^k_c(S_1 \times \mathbb{R})$ para todo entero $k \geq 0$.

Ejercicio 7. Sea M una variedad diferencial conexa de dimensión n, orientable, con borde $\partial M \neq \emptyset$. Se admite la existencia (por excisión) de un isomorfismo $H^n_c(M, \partial M) \simeq H^n_c(M \setminus \partial M)$. Mostrar que $H^n_c(M, \partial M) \simeq \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Sea M una variedad diferencial compacta conexa y orientada, de dimensión n. Sea $\Delta : M \longrightarrow M \times M$ el encaje diagonal y sea $\Lambda_M \in H^n(M \times M)$ el dual de Poincaré de $\Delta(M)$ en $M \times M$. Sea $f : M \longrightarrow M$ una aplicación de clase C^∞ y sea $F : M \times M$ definida por $(x, y) \longmapsto (x, f(y))$. Mostrar que el dual de Poincaré de la gráfica de f en $M \times M$ es $F^*\Lambda_M$.

Ejercicio 9. Sea M una variedad diferencial de dimensión n cuya cohomología de de Rham es de dimensión finita como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
a. Definir una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal (*cap product*)

$$H_p(M) \times H^q(M) \longrightarrow H_{p-q}(M).$$

Indicación: Utilizar el isomorfismo

$$H_p(M) \simeq H^p(M)^*$$

(dual del isomorfismo de de Rham). **b.** Mostrar que si la dualidad de Poincaré es verdad en M, entonces el producto anteriormente definido es el producto copa habitual $H^{n-p}(M) \times H^q(M) \longrightarrow H^{n-p+q}(M)$, definido por $([\lambda], [\mu]) \longmapsto [\lambda \wedge \mu]$, y que también se puede ver como un producto de intersección (la codimensión del producto es la suma de las codimensiones de los factores)

$$H_p(M) \times H_{n-q}(M) \longrightarrow H_{p-q}(M).$$

Ejercicio 10. Mostrar que el único grupo finito que actúa libremente en S_{2k} es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Indicación:* Para G finito actuando de manera libre en M compacto, $\chi(M) = |G|\chi(M/G)$.