Hoja de ejercicios 2 : Cohomología de de Rham II

2016-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea S_1 el círculo unidad y sea $T^n = S_1 \times \ldots \times S_1$ (n veces).
a. Mostrar que existe un isomorfismo de álgebras $H^*(S_1) \simeq \Lambda_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \Lambda_{\mathbb{R}}[t]$ con $\mathrm{gdo}(t) = 1$.
b. Mostrar que existe un isomorfismo de álgebras $H^*(T^n) \simeq \Lambda_{\mathbb{R}}[t_1, \ldots, t_n]$ con $\mathrm{gdo}(\mathrm{t_i}) = i$.
c. Determinar el polinomio de Poincaré de T^n y su característica de Euler.
Indicación: Mostrar que el polinomio de Poincaré de un producto tensorial $E \otimes F$ de dos espacios vectoriales graduados es el producto de los polinomios de Poincaré de E y F.

EJERCICIO 2. Sea Σ_g una superficie compacta conexa orientable de género g y sea $p \in \Sigma_g$. Sea $i : S_1 \hookrightarrow \Sigma \setminus \{p\}$ la "inclusión de un círculo pequeño alrededor de p".
a. Mostrar que el homomorfismo inducido $i^* : H^1(\Sigma_g \setminus \{p\}) \longrightarrow H^1(S_1)$ es el homomorfismo nulo.
b. Utilizando sucesiones exactas de Mayer-Vietoris y la pregunta anterior, calcular, para todo $g \geq 0$, la cohomología de de Rham de $\Sigma_g \setminus \{p\}$ y la de Σ_g.

EJERCICIO 3. Sea $n \geq 0$ un entero. Calcular la cohomología de de Rham de

$$\mathbb{C} \setminus \{0; 1; \ldots; n\}.$$

EJERCICIO 4. Calcular la cohomología de de Rham del grupo de Lie $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}_3$.

EJERCICIO 5. Utilizando la existencia de un difeomorfismo $\mathbf{SU}(2) \simeq S_3$ y la fórmula de Künneth, calcular la cohomología de de Rham del grupo de Lie $\mathbf{U}(2)$.

EJERCICIO 6. Sea G un grupo actuando por difeomorfismos en una variedad diferencial M.
a. Mostrar que G actúa en $\Omega(M)$ y en $H^*(M)$.
b. Se supondrá de ahora en adelante que G es un grupo finito. Mostrar que existe un isomorfismo $H^*(\Omega(M)^G) \simeq H^*(M)^G$.
c. Se supone ahora que la acción del grupo finito G en M es libre. Mostrar que $\pi : M \longrightarrow M/G$ induce un isomorfismo

$$\pi^* : H^*(M/G) \xrightarrow{\simeq} H^*(\Omega(M)^G).$$

Indicación: Mostrar que existe un isomorfismo de complejos $\Omega(M/G) \simeq \Omega(M)^G$.

EJERCICIO 7. Sea $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ el plano proyectivo real y sea $\Sigma_{\hat{g}}$ una superficie compacta conexa orientable de género $\hat{g}$.
a. Recordar cómo se calcula la cohomología de de Rham de $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$.
b. Calcular la cohomología de de Rham de $\mathbb{R}\mathbf{P}_2 \setminus \{\mathrm{pt}\}$.
c. Calcular la cohomología de de Rham de la suma conexa $\mathcal{K} := \mathbb{R}\mathbf{P}_2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}_2$.
d. Calcular la cohomología de de Rham de $\mathcal{K} \setminus \{\mathrm{pt}\}$.
e. Calcular la cohomología de de Rham de $\Sigma_{\hat{g}} \# \mathbb{R}\mathbf{P}_2$.
f. Calcular la cohomología de de Rham de $\Sigma_{\hat{g}} \# \mathcal{K}$.

EJERCICIO 8. (Como complemento a la Tarea 1). Sea A un anillo.
a. Mostrar que un A-módulo P es proyectivo si y solamente si cualquier sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

se escinde.
b. Mostrar que un A-módulo I es inyectivo si y solamente si cualquier sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

se escinde.
c. Mostrar que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano e inyectivo pero no proyectivo.
d. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow n\mathbb{Z}$ la multiplicación por $n \geq 2$. Mostrar que el homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos f es inyectivo pero que el homomorfismo

$$\mathrm{Id} \otimes f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes n\mathbb{Z}$$

no es inyectivo (en particular, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo plano).
e. Mostrar que si $e = e^2$ es un idempotente en el anillo A, entonces Ae es un A-módulo proyectivo. *Indicación:* Mostrar que, para cualquier A-módulo N, $\mathrm{Hom}(Ae; N) = eN$.
f. Supongamos A conmutativo y sea $n \geq 2$ un entero. Mostrar que si $B = \mathbf{GL}(n; A)$, entonces el B-módulo A^n es proyectivo pero no es libre.