Universidad de Los Andes — Topología algebraica 2

Hoja de ejercicios 1 : Cohomología de de Rham I

2016-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{C}^\infty(U)$ el $\mathbb{R}$-álgebra de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U.
a. Mostrar que el álgebra exterior $\Lambda_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2^n.
b. Sea $\Omega(U) := \mathcal{C}^\infty(U; \Lambda_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*)$ el $\mathbb{R}$-álgebra de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ de U a $\Lambda_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*$. Mostrar que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras

$$\Omega(U) \simeq \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_\mathbb{R} \Lambda_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*.$$

c. Se pone $\Omega^k(U) := \mathcal{C}^\infty(U; \Lambda^k_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*)$. Mostrar que $\Omega(U)$ es isomorfo al álgebra exterior del $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo $\Omega^1(U)$.

Ejercicio 2. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Mostar que, para todo $k > n$, el k-ésimo espacio de cohomología de de Rham $H^k(U)$ es el espacio nulo.

Ejercicio 3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y denotemos $(U_i)_{i \in I}$ sus componentes conexas.
a. Mostar que la $\mathbb{R}$-álgebra $H^*(U)$ es isomorfa al álgebra producto $\prod_{i\in I} H^*(U_i)$.
b. Mostrar que $H^0(U) \simeq \mathbb{R}^I$.

Ejercicio 4. Retomar los ejercicios **2** y **3**, remplazando el abierto U de $\mathbb{R}^n$ por una variedad diferencial M.

Ejercicio 5. Mostrar que las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \longmapsto & x \end{array}$$

y

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

inducen isomorfismos inversos el uno del otro en cohomología.

Ejercicio 6. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación constante entre variedades $\mathcal{C}^\infty$. Mostar que el homorfismo de álgebra

$$f^* : \Omega(N) \longrightarrow \Omega(M)$$

es el homomorfismo nulo.

Ejercicio 7. Para $n \geq 1$ y $k \geq 0$, calcular $H^k(S_n)$.

Ejercicio 8. Para $n \geq 2$ y $k \geq 0$, calcular las cohomologías relativas $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y $H^k(S_n, S_{n-1})$.

Ejercicio 9. Sean $A = \oplus_{k\in\mathbb{N}} A_n$ y $B = \oplus_{k\in\mathbb{N}} B_n$ dos álgebras graduadas sobre un cuerpo K.
a. Mostar que en el K-espacio vectorial producto tensorial $A \otimes B$, las dos siguientes ecuaciones definen estructuras de K-álgebras graduadas:

$$(a\otimes b)(a'\otimes b') = (aa')\otimes(bb')$$

y

$$(a\otimes b)(a'\otimes b') = (-1)^{|b||a'|}(aa')\otimes(bb')$$

donde se supone que a, b, a', b' son elementos homogéneos.
b. Se denotará $\hat{\otimes}$ la segunda estrúctura de álgebra. Mostar que si E y F son dos K-espacios vectoriales, entonces existe un isomorfismo

$$\Lambda(E\oplus F) \simeq \Lambda(E)\hat{\otimes}\Lambda(F).$$

Ejercicio 10. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$.
a. Mostar que $\Omega_c(U)$, el espacio de formas diferenciales con soporte compacto, es una sub-álgebra diferencial graduada de $\Omega(U)$.
b. Mostrar que $\Omega_c(U)$ es un ideal bilátero de $\Omega(U)$.
c. Sea $\mathcal{C}^\infty_c(U)$ el álgebra de funciones reales de clase $\mathcal{C}^\infty$ y con soporte compacto en U. Mostrar que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras diferenciales graduadas

$$\Omega_c(U) \simeq \mathcal{C}^\infty_c(U) \otimes \Lambda_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)^*.$$

Ejercicio 11. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación propia (i.e. la pre-imagen de un compacto $K \subset N$ es un compacto $f^{-1}(K)$ de M). Mostrar que f induce un homomorfismo de álgebras gradudas $f^* : H^*_c(N) \longrightarrow H^*_c(M)$.

Ejercicio 12. Sea V un abierto de una variedad diferencial M y sea ω una forma diferencial en V tal que $\mathrm{sop}(\omega)$ es cerrado en V (por ejemplo si ω tiene soporte compacto). Mostrar que existe una única forma diferencial $\widetilde{\omega}$ en M tal que $\widetilde{\omega}_x = \omega_x$ si $x \in V$ y $\widetilde{\omega}_x = 0$ si $x \notin V$.

Ejercicio 13. Determinar la expresión del homomorfismo de conexión en las sucesiones exactas de Mayer-Vietoris para la cohomología de de Rham ordinaria y con soportes compactos.