

**Parcial 4 (Duración: 1h20)**

5 DE MAYO 2016

FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. Debe entregar el tema con su hoja de examen.

**Ejercicio 1 (2 puntos)**

Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial  $X'(t) = AX(t)$  donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 2**

Se considera la ecuación diferencial  $X'(t) = AX(t)$  con  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

a. (2 puntos) Calcular  $e^{tA}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . *Indicación:* Hallar  $P$  invertible tal que  $A = P\Delta P^{-1}$ , donde  $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

b. (2 puntos) Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación  $X'(t) = AX(t)$ .

c. (1 punto) Hallar la solución del problema de Cauchy

$$(C) : X'(t) = AX(t), X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3** Se considera la ecuación diferencial no homogénea  $X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix}$

con  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

a. (2 puntos) Hallar la solución general de la ecuación homogénea asociada.

b. (2 puntos) Hallar una solución particular de la ecuación no homogénea.

c. (1 punto) Hallar la solución general de la ecuación no homogénea.

**Ejercicio 4 (2 puntos)**

Sea  $L > 0$  y sea  $u : [0; L] \times [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Sea  $\alpha \in ]0; +\infty[$  una constante y sea  $f : [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) & (0 < x < L, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0 & (t > 0) \\ u_x(L, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) & (0 < x < L) \end{cases}$$

**Ejercicio 5 (1 punto)** Sea  $A \in M(n; \mathbb{R})$  una matriz cuadrada  $n \times n$ . Mostrar que la matriz  $e^A$  es invertible y determinar su inversa.