Solución del cuarto parcial

2016-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1 Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - i$. Como vectores propios asociados, podemos escoger, por ejemplo,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_2 = \overline{C_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos el siguiente sistema fundamental de soluciones para la ecuación $X'(t) = X(t)$:

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} C_1 = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_2(t) = \overline{X_1(t)} = e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

y también este otro:

$$\frac{X_1(t) + \overline{X_1(t)}}{2} = \operatorname{Re} X_1(t) = e^t[\cos t \operatorname{Re} C_1 - \operatorname{sen} t \operatorname{Im} C_1] = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y

$$\pm \frac{X_1(t) - \overline{X_1(t)}}{2i} = \pm \operatorname{Im} X_1(t) = \pm e^t[\operatorname{sen} t \operatorname{Re} C_1 + \cos t \operatorname{Im} C_1] = \pm e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 a. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene como solo valor propio $\lambda = 2$. Como vector propio asociado, podemos escoger $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siendo A una matriz 2×2, sabemos que en esta situación existe un vector w, linealmente independiente de v tal que $Aw = 2w + v$, es decir $(A - 2I_2)w = v$. En efecto, podemos escoger $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces tenemos $A = P\Delta P^{-1}$ con $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, para todo $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = Pe^{t\Delta}P^{-1}$ y, como $t\Delta = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos

$$e^{t\Delta} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

es decir que $e^{tA} = (Pe^{t\Delta})P^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{2t} & e^{2t} - te^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$.

b. Como sistema fundamental de soluciones de la ecuación $X'(t) = AX(t)$, podemos escoger las columnas de la matriz e^{tA} arriba. También podemos escoger

$$(e^{\lambda t}v, te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w) = \left(\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \right).$$

c. La solución del problema de Cauchy (C) $: X'(t) = AX(t), X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es

$$X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 3te^{2t} \\ 3te^{t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

También se puede hallar esa solución resolviendo el sistema

$$(\alpha e^{\lambda t}v + \beta(te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w))|_{t=0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir $\alpha v + \beta w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y se obtiene $\alpha = 1$ y $\beta = 3$, así que, en efecto,

$$\alpha e^{\lambda t}v + \beta(te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 3te^{2t} \\ 3te^{t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 a. La matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene 2 valores propios reales distintos $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -3$. Como vectores propios asociados podemos escoger $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así que la familia

$$(e^{\lambda_1 t}C_1, e^{\lambda_2 t}C_2) = \left(\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \right)$$

es un sistema fundamental de solucionesde la ecuación homogénea $X'(t) = AX(t)$.

b. Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea $X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix}$, podemos utilizar el método de variación de la constante: se forma la matriz $M(t) := \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$, cuyas columnas son los vectores del sistema fundamental de soluciones hallado anteriormente (para la ecuación homogénea $X'(t) = AX(t)$) y se busca una solución $X_P(t)$ bajo la forma $M(t)U(t)$ donde $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$. Se tiene

$$(M(t)U(t))' = M'(t)U(t) + M(t)U'(t) = AM(t)U(t) + M(t)U'(t),$$

lo cual es igual a $AM(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix}$ si y solamente si $M(t)U'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$, es decir si

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \left(M(t)\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3te^{t} \\ 3te^{3t} \end{pmatrix},$$

por lo que podemos escoger $U(t) = \begin{pmatrix} 3te^{t} - 3e^{t} \\ te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix}$, luego

$$X_P(t) = M(t)U(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{8}{3} \\ 2t - \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

c. Basado en lo anterior, se tiene por teorema que la solución general de la ecuación $X'(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix}$ es

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + X_P(t)$$

con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4 Se aplica el método de separación de las variables: se busca una solución $u(x,t)$ bajo la forma $X(x)T(t)$. Entonces, por un lado, la ecuación $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ se vuelve $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$. Suponiendo que X y T no son identicamente nulas,

las funciones $x \longmapsto \frac{X''(x)}{X(x)}$ y $t \longmapsto \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$ son iguales donde están definidas y por lo tanto son funciones constantes. Denotaremos $-\lambda$ la constante de separación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

de modo que llegamos al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X''(x) + \lambda X(x) & = & 0 \\ T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

Por otro lado, las condiciones de borde $u_x(0,t) = u_x(0,L) = 0$ se vuelven, bajo nuestra hipótesis que $u(x,t) = X(x)T(t)$,

$$X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$$

para todo $t > 0$. Para evitar $T \equiv 0$, se impone entonces $X'(0) = X'(L) = 0$. Pero entonces la ecuación $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, con condición de borde $X'(0) = X'(L) = 0$ tiene soluciones no triviales si y solamente si $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ para algún $n = 1, 2, \ldots$. Y para tal n fijo, cualquier solución es múltiple de la solución fundamental

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

(se puede notar que el espacio de soluciones de esta ecuación de orden 2 con condiciones de borde es de dimensión 1 y no 2 como sería el caso para un problema de Cauchy de orden 2). Además, para $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, la ecuación $T'(t) + \alpha^2\lambda T(t) = 0$ tiene soluciones no triviales, todas múltiples de la solución fundamental

$$T_n(t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

Se verifica entonces que la función $u_n(x,t) := X_n(x)T_n(t)$ es solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,t) & = & \alpha^2 u_{xx}(x,t) & (0 < x < L, t > 0) \\ u_x(0,t) & = & 0 & (t > 0) \\ u_x(0,t) & = & 0 & (t > 0) \\ u(x,0) & = & f(x) & (0 < x < L) \end{array} \right.$$

salvo tal vez la última condición. Tal es el caso también de la función $u(x,t)$ definida por la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t},$$

siempre y cuando ésta converge. Y entonces tenemos, para todo $x \in]0;L[$,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

la cual queremos que sea igual a $f(x)$. Para ver cuál elección de los coeficientes $(c_n)_{n\geq 1}$ permite eso, tratemos de expresar $f(x)$ bajo la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Ya que

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{L}{2} & \text{si } n = m \end{array} \right.$$

Si suponemos que

$$\int_0^L \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\cos\left(\frac{m\pi}{x}\right)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx,$$

entonces viene, para todo $m \geq 1$,

$$c_m(f) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,dx.$$

A continuación, aceptaremos que, para todo $x \in [0; L]$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

así definida es convergente y converge hacia $f(x)$ y que, si ponemos

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) u_n(x,t),$$

obtenemos una solución del problema planteado arriba (habría que verificar que esa serie converge, que la función así definida es de clase C^2 y que en efecto cumple con las condiciones del problema; se puede demostrar que esto es así si f es de clase C^1 a trozos en $[0; L]$).

Ejercicio 5 Ya que A y $-A$ conmutan, uno tiene $e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I_n$. Luego, e^A es invertible y $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.