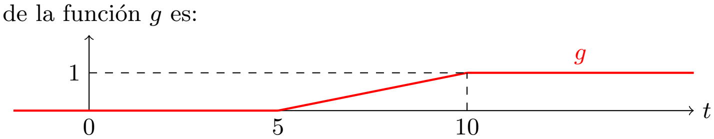
Universidad de Los Andes — Ecuaciones diferenciales

Solución del tercer parcial

2016-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1

a. La función definida por
$$g(t) = \frac{t-5}{5}u_5(t) - \frac{t-10}{5}u_{10}(t)$$
cumple con
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5, \\ \frac{t-5}{5} & \text{si } 5 \leq t \leq 10, \\ \frac{t-5}{5} - \frac{t-10}{5} = 1 & \text{si } t \geq 10. \end{cases}$$
La gráfica de la función g es:



b. Se puede notar que la función g es de clase C^0. Por lo tanto, el problema de Cauchy (C), que es de orden 2, tiene solución única y ésa es de clase C^{2+0}.

Notemos que la transformada de Laplace de g existe y que, para todo $s > 0$, $\mathcal{L}_g(s) = \frac{e^{-5s}}{s^2} - \frac{e^{-10s}}{s^2}$. Si y es solución del problema de Cauchy
$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} y'' + 4y &= g(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$
y si y y y'' admiten transformadas de Laplace, entonces se tiene, para $s > 0$ suficientemente grande,
$$\mathcal{L}_{y''+4y}(s) = \mathcal{L}_g(s). \tag{1}$$
Pero
$$\mathcal{L}_{y''+4y}(s) = (s^2\mathcal{L}_y(s) - sy(0) - y(0)) + 4\mathcal{L}_y(s).$$
Luego, teniendo en cuenta las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, la ecuación (1) es equivalente a
$$(s^2+4)\mathcal{L}_y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2}$$
es decir:
$$\mathcal{L}_y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2(s^2+4)}. \tag{2}$$
Busquemos primero una función $h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$\mathcal{L}_h(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}.$$
Gracias a la tabla de transformadas de Laplace de funciones usuales, se tiene
$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\mathrm{sen}(2t)$$
y, utilizando otra vez la tabla, tenemos que la siguiente función
$$y(t) = \frac{1}{5}[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)]$$

es solución de la ecuación (2).

Notemos que

$$y(t)=\begin{cases} 0 & & & \text{si } t<5,\\ h(t-5) & = & \frac{t-5}{20}-\frac{1}{40}\mathrm{sen}(2(t-5)) & \text{si } 5\le t\le 10,\\ h(t-5)-h(t-10) & = & \frac{1}{4}-\frac{1}{40}[\mathrm{sen}(2(t-5))-\mathrm{sen}(2(t-10))] & \text{si } t\ge 10.\end{cases}$$

y que con esta expresión es inmediato verificar que y es solución del problema de Cauchy (C).

Ejercicio 2

La transformada de Laplace de la distribución δ_4 es la función $s\longmapsto e^{-4s}$. Luego, por definición, una función $y:[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ es solución del problema de Cauchy generalizado

$$(\mathrm{G}):\begin{cases} y''+2y'+5y &=& \delta_4\\ y(0)&=&0\\ y'(0)&=&2\end{cases}$$

si y solamente si la transformada de Laplace de y existe y cumple con la ecuación

$$(s^2\mathcal{L}_y(s)-sy(0)-y'(0))+2(s\mathcal{L}_y(s)-y(0))+5\mathcal{L}_y(s)=e^{-4s},$$

es decir (teniendo en cuenta las condiciones iniciales $y(0)=0$ y $y'(0)=2$):

$$\mathcal{L}_y(s)=\frac{2+e^{-4s}}{s^2+2s+5}=\frac{2}{s^2+2s+5}+\frac{e^{-4s}}{s^2+2s+5} \tag{3}$$

donde se utilizó que, para todo $s\in\mathbb{R}$, $s^2+2s+5\neq 0$. Busquemos primero una función $h:[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_h(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$. Completando los cuadrados en el denominador, viene

$$\mathcal{L}_h(s)=\frac{1}{(s+1)^2+4}. \tag{4}$$

Ya que $\mathcal{L}_{\mathrm{sen}(kt)}(u)=\frac{k}{u^2+k^2}$, si ponemos $u=s+1$ y $k=2$, viene, por un lado,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ut}\mathrm{sen}(2t)\,dt=\frac{2}{u^2+4}=\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

y, por otro lado,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ut}\mathrm{sen}(2t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-st}(e^{-t}\mathrm{sen}(2t))\,dt.$$

Luego, la función

$$h(t):=\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)$$

es solución de (4) y la función

$$y(t):=2h(t)+u_4(t)h(t-4)$$

(donde $u_4(t)=0$ si $t<4$ y $u_4(t)=1$ si $t\ge 4$) es solución del problema de Cauchy generalizado (G), pues y es una función cuya transformada de Laplace existe y es solución de (3).

Ejercicio 3

a. La única raíz real de s^3+1 es $s=-1$, por lo que

$$\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)}=\frac{1/3}{s+1}+\frac{-s/3+2/3}{s^2-s+1}$$

b. Si $y : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 tal que las transformadas de Laplace $\mathcal{L}_y$ y $\mathcal{L}_{y'}$ existen, entonces la ecuación integro-diferencial con condición inicial

$$(\mathrm{I}) : \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + \int_0^t (t-u) y(u)\, du & = & t \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

es equivalente a la ecuación

$$s\mathcal{L}_y(s) + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}_y(s) = \frac{1}{s^2}, \tag{5}$$

es decir, utilizando la pregunta **a**,

$$\mathcal{L}_y(s) = \frac{1}{s^3+1} = \frac{1/3}{s+1} + \frac{-s/3+2/3}{s^2-s+1} = \frac{1/3}{s+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right)$$

Utilizando la tabla de transformadas de Laplace, obtenemos que

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}f(t),$$

donde $f(t) = e^{t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \sqrt{3}e^{t/2}\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$, es la solución de (I).