UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — ECUACIONES DIFERENCIALES

Parcial 3 (Duración: 50 minutos)

12 DE ABRIL 2016 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los dispositivos electrónicos (celulares, calculadoras, tabletas etc.) deben permanecer **apagados y guardados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. Debe entregar el tema con su hoja de examen.

Al respaldo de esta hoja se encuentra una tabla con las transformadas de Laplace de algunas funciones usuales.

Ejercicio 1

Dado $c \in [0;+\infty[$, se denota u_c la función definida por $u_c(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < c \\ 1 & \text{si } t \geq c \end{array} \right.$.

a. `(1 punto)` Sea $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(t) = \frac{t-5}{5} u_5(t) - \frac{t-10}{5} u_{10}(t).$$

Dibujar la gráfica de la función g.

b. `(3 puntos)` Utilizando la transformación de Laplace, resolver el problema de Cauchy

$$(\mathrm{C}) : \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + 4y & = & g(t) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2 `(3 puntos)`

Dado $t_0 \in [0;+\infty[$, se denota δ_{t_0} la distribución de Dirac en t_0 (función generalizada).

Utilizando la transformación de Laplace, resolver el problema de Cauchy generalizado

$$(\mathrm{G}) : \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + 2y' + 5y & = & \delta_4 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 2 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3

a. `(1 punto)` Factorizar el polinomio con coeficientes reales $P(s) = s^3 + 1$ en productos de factores irreducibles y hallar la descomposición en elementos simples de la fracción racional

$$Q(s) = \frac{1}{s^3 + 1}.$$

b. `(2 puntos)` Utilizando la transformación de Laplace, resolver la ecuación integro-diferencial con condición inicial

$$(\mathrm{I}) : \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) + \int_0^t (t-u) y(u)\, du & = & t \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\dfrac{1}{s}$	(1)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(2)
$\mathcal{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	(3)
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)
$\delta(t)$	1	(5)
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	(6)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)
$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) -$ $\cdots - f^{(n-1)}(0)$	(9)
$\displaystyle\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	(11)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(12)
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	(13)
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	(14)
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	(15)
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	(16)
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	(17)
$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	(18)

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	(19)
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	(20)
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(21)
$e^{at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(22)
$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(23)
$e^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(24)
$e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(25)
$t\sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(26)
$t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(27)
$t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(28)
$t\cosh kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(29)
$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan\dfrac{a}{s}$	(30)
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)