Solución del segundo parcial

2016-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

Tema A

Ejercicio 1

La ecuación característica de la ecuación lineal homogénea $4y'' - 8y' + 3y = 0$ es $4r^2 - 8r + 3 = 0$, la cual tiene dos raíces reales distintas $r_1 = \frac{3}{2}$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación $4y'' - 8y' + 3y = 0$ es $y(t) = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. En particular, $y'(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}t}$. Con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = \frac{1}{2}$, viene $c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{5}{2}$, es decir $y(t) = -\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}t} + \frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}t}$.

Ejercicio 2

a. La función $y_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t} \end{array} \right.$ cumple con

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 2t^2 \frac{2}{t^3} + 3t\left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} = 0$$

por lo que $y_1(t) = \frac{1}{t}$ es solución de $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$.

b. Para hallar una función $y_2 :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de (E) y que sea linealmente independiente de y_1, se puede por ejemplo[1] buscar y_2 bajo la forma $y_2 = u(t) y_1 = \frac{u(t)}{t}$. Entonces la ecuación $2t^2 y_2'' + 3t y_2' - y_2 = 0$ se cumple si y solamente si $2tu'' - u' = 0$, lo cual se cumple por ejemplo si $u'(t) = \sqrt{t}$. Luego, podemos escoger $u(t) = \frac{2}{3} t^{3/2}$ y tenemos $y_2(t) = \frac{2}{3}\sqrt{t}$ (también se puede escoger $y_2(t) = \sqrt{t}$, lo cual es más fácil para la siguiente pregunta).

c. Por los incisos **a** y **b**, la solución general de la ecuación $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$ es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \frac{c_1}{t} + c_2\sqrt{t}.$$

Luego $y'(t) = -\frac{c_1}{t^2} + \frac{c_2}{2\sqrt{t}}$. Por lo tanto, la condición de Cauchy $y(1) = 2$ y $y'(1) = 1$ se cumple si y solamente si $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$, es decir que la solución buscada es $y(t) = 2\sqrt{t}$.

Ejercicio 3

a. Utilizando la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ (cuyas raíces son i y $-i$), la solución general de la ecuación homogénea asociada a $y'' + y = 3\operatorname{sen}(2t)$ es $y_h(t) = c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

b. Para hallar una solución particular y_0 de la ecuación $y'' + y = 3\operatorname{sen}(2t)$, se busca y_0 bajo la forma $y_0(t) = A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t)$. Viene entonces $y_0'' + y_0 = -4A\operatorname{sen}(2t) - 4B\cos(2t) + A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t)$, lo cual es igual a $\operatorname{sen}(2t)$ si y solamente si $A = -1$ y $B = 0$, es decir que $y_0(t) = -\operatorname{sen}(2t)$.

[1] También se puede utilizar el wronskiano y el teorema de Abel: $y_1 y_2' - y_1' y_2 = \exp(-\int p_1(s)\, ds)$, es decir, aquí, $y_2'/t + y_2/t^2 = \exp(-\int (3/(2s))\, ds = t\sqrt{t}$, luego $y_2' + y_2/t = 1/\sqrt{t}$, lo cual se cumple por ejemplo para $y_2(t) = (2\sqrt{t})/3$.

c. Ya que y_0 es una solución de la ecuación $y'' + y = 3\operatorname{sen}(2t)$, la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y &= 3\operatorname{sen}(2t) \\ y(0) &= y_0(0) \\ y'(0) &= y_0'(0) \end{cases}$$

es y_0, por unicidad de la solución a un problema de Cauchy con coeficientes continuos.

Tema B

Ejercicio 1

La ecuación característica de la ecuación lineal homogénea $4y'' - 4y' + y = 0$ es $4r^2 - 4r + 1 = 0$, la cual tiene una raíz real doble $r_0 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación $4y'' - 4y' + y = 0$ es $y(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. En particular, $y'(t) = \frac{1}{2}c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$. Con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = \frac{1}{3}$, viene $c_1 = 2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, es decir $y(t) = 2e^{\frac{1}{2}t} - \frac{2}{3}te^{\frac{1}{2}t}$.

Ejercicio 2

a. La función $y_1 : \begin{cases}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{cases}$ cumple con

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 2t^2 \frac{-1}{4t\sqrt{t}} + 3t\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) - \sqrt{t} = 0$$

por lo que $y_1(t) = \sqrt{t}$ es solución de $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$.

b. Para hallar una función $y_2 :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de (E) y que sea linealmente independiente de y_1, se puede por ejemplo buscar y_2 bajo la forma $y_2 = u(t)y_1 = u(t)\sqrt{t}$. Entonces la ecuación $2t^2y_2'' + 3ty_2' - y_2 = 0$ se cumple si y solamente si $2tu'' + 5u' = 0$, lo cual se cumple por ejemplo si $u'(t) = t^{-\frac{5}{2}}$. Luego, podemos escoger $u(t) = \frac{2}{5}t^{-3/2}$ y tenemos $y_2(t) = \frac{2}{5t}$ (también se puede escoger $y_2(t) = \frac{1}{t}$, lo cual es más fácil para la siguiente pregunta).

c. Por los incisos **a** y **b**, la solución general de la ecuación $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1\sqrt{t} + \frac{c_2}{t}.$$

Luego $y'(t) = \frac{c_1}{2\sqrt{t}} - \frac{c_2}{t^2}$. Por lo tanto, la condición de Cauchy $y(1) = 2$ y $y'(1) = 1$ se cumple si y solamente si $c_1 = 2$ y $c_2 = 0$, es decir que la solución buscada es $y(t) = 2\sqrt{t}$.

Ejercicio 3

a. Utilizando la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ (cuyas raíces son i y $-i$), la solución general de la ecuación homogénea asociada a $y'' + y = 3\operatorname{sen}(2t)$ es $y_h(t) = c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

b. Para hallar una solución particular y_0 de la ecuación $y'' + y = 3\cos(2t)$, se busca y_0 bajo la forma $y_0(t) = A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t)$. Viene entonces $y_0'' + y_0 = -4A\operatorname{sen}(2t) - 4B\cos(2t) + A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t)$, lo cual es igual a $3\cos(2t)$ si y solamente si $A = 0$ y $B = -1$, es decir que $y_0(t) = -\cos(2t)$.

c. Ya que y_0 es una solución de la ecuación $y'' + y = 3\cos(2t)$, la solución al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y &= 3\cos(2t) \\ y(0) &= y_0(0) \\ y'(0) &= y_0'(0) \end{cases}$$

es y_0, por unicidad de la solución a un problema de Cauchy con coeficientes continuos.

Tema C

Ejercicio 1

La ecuación característica de la ecuación lineal homogénea $16y'' - 8y' + 145y = 0$ es $16r^2 - 8r + 145 = 0$, la cual tiene discriminante $\Delta = 8^2 - 4(16 \times 145) = 8^2(1 - 145) = -8^2 \times 12^2$. Eso muestra que la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas $r_1 = \frac{1}{4} + 3i$ y $r_2 = \frac{1}{4} - 3i$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación $16y'' - 8y' + 145y = 0$ es $y(t) = e^{\frac{t}{4}}(c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t))$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. En particular, $y'(t) = e^{\frac{t}{4}}(\frac{1}{4}(c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t)) - 3c_1 \operatorname{sen}(3t) + 3c_2 \cos(3t))$. Con condiciones iniciales $y(0) = -2$ y $y'(0) = 1$, viene $c_1 = -2$ y $c_2 = \frac{1}{2}$, es decir $y(t) = e^{\frac{t}{4}}(-2\cos(3t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3t))$.

Ejercicio 2

a. La función $y_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t} \end{array} \right.$ cumple con

$$t^2y'' + 3ty' + y = t^2\frac{2}{t^3} + 3t\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t} = 0$$

por lo que $y_1(t) = \frac{1}{t}$ es solución de $t^2y'' + 3ty' + y = 0$.

b. Para hallar una función $y_2 :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de (E) y que sea linealmente independiente de y_1, se puede por ejemplo buscar y_2 bajo la forma $y_2 = u(t)y_1 = \frac{u(t)}{t}$. Entonces la ecuación $t^2y_2'' + 3ty_2' + y_2 = 0$ se cumple si y solamente si $tu'' + u' = 0$, lo cual se cumple por ejemplo si $u'(t) = \frac{1}{t}$. Luego, podemos escoger $u(t) = \ln(t)$ y tenemos $y_2(t) = \frac{\ln(t)}{t}$.

c. Por los incisos **a** y **b**, la solución general de la ecuación $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ es

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = \frac{c_1}{t} + c_2\frac{\ln(t)}{t}.$$

Luego $y'(t) = -\frac{c_1}{t^2} + c_2\frac{1-\ln(t)}{t^2}$. Por lo tanto, la condición de Cauchy $y(1) = 1$ y $y'(1) = 0$ se cumple si y solamente si $c_1 = c_2 = 1$, es decir que la solución buscada es $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{\ln(t)}{t}$.

Ejercicio 3

a. Utilizando la ecuación característica $2r^2 + 3r + 1 = 0$ (cuyas raíces son -1 y $-1/2$), la solución general de la ecuación homogénea asociada a $2y'' + 3y' + y = 3\operatorname{sen}(t)$ es $y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-t/2}$, con $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

b. Para hallar una solución particular y_0 de la ecuación $2y'' + 3y' + y = 3\operatorname{sen}(t)$, se busca y_0 bajo la forma $y_0(t) = A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$. Viene entonces $2y_0'' + 3y_0' + y_0 = -2A\operatorname{sen}(t) - 2B\cos(t) + 3A\cos(t) - 3B\operatorname{sen}(t)$, lo cual es igual a $3\operatorname{sen}(t)$ si y solamente si $A = -3/10$ y $B = -9/10$, es decir que $y_0(t) = -\frac{3}{10}\operatorname{sen}(t) - \frac{9}{10}\cos(t)$.

c. Ya que y_0 es una solución de la ecuación $2y'' + 3y' + y = 3\operatorname{sen}(t)$, la solución al problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y'' + 3y' + y & = & 3\operatorname{sen}(t) \\ y(0) & = & y_0(0) \\ y'(0) & = & y_0'(0) \end{array} \right.$$

es y_0, por unicidad de la solución a un problema de Cauchy con coeficientes continuos (nótese que el coeficiente de y'' en la ecuación es una constante no nula).