Solución del primer parcial

2016-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1

Ecuación	Lineal	Separable	Exacta	Homogénea
$y' = 27y$	X			
$(4+y^3)y' = 4 - x^3$		X	X	
$(y\cos(x) + 2xe^y)$ $+(\operatorname{sen}(x) + x^2e^y - 1)y' = 0$			X	
$(x^2+y^2) + (2xy)y' = 0$			X	X

Ejercicio 2

a. La ecuación del problema (E) es separable, equivalente a la ecuación $g(x)dx + h(y)dy = 0$, con $g(x) = 3x^2+4x+2$ y $h(y) = -2(y-1)$. La función $S(x,y) := x^3+2x^2+2x-y^2+2y$ cumple con las condiciones $\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = g(x)$ y $\frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = h(y)$. Por lo tanto, si $(I, y : I \longrightarrow \mathbb{R})$ es solución de (E), entonces, la función $\phi(x) := S(x, y(x))$ cumple con que, para todo $x \in I$, $\phi'(x) = 0$ (¡verifíquelo!). Luego, existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in I$, $\phi(x) = k$. Ya que $0 \in I$ y $y(0) = 3$, se obtiene que $c = \phi(0) = S(0,3) = -3$. Luego, para todo $x \in I$,

$$y^2(x) - 2y(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

b. Por lo tanto, si (I, y) es solución de (E), entonces, para todo $x \in I$, $(y(x)-1)^2 - 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ y, ya que $y(0) = 3$, se deduce que, para todo $x \in I$,

$$y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Ya que $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x+2)(x^2+2)$, se tiene que el dominio de derivabilidad D_y de la función y obtenida en el punto anterior es $]-2; +\infty[$.

c. La función $y : x \longmapsto 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$ es derivable en $]-2; +\infty[$ y se tiene $y(0) = 3$ y, para todo $x \in]-2; +\infty[$,

$$2(y(x)-1)y'(x) = 2\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}\,\frac{3x^2+4x+2}{2\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}} = 3x^2+4x+2,$$

así que esta función y es solución del problema de Cauchy (E) en el intervalo $]-2; +\infty[$.

Ejercicio 3

Se considera el problema de Cauchy

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{rcl} (y\cos(x) + 2xe^y) + (\operatorname{sen}(x) + x^2e^y - 1)y' & = & 0 \\ y(0) & = & \pi \end{array} \right.$$

y se denota $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto que contiene el punto 0.

a. La ecuación $(y\cos(x) + 2xe^y) + (\operatorname{sen}(x) + x^2e^y - 1)y' = 0$ es exacta porque es equivalente a la ecuación $g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0$ con $g(x,y) = (y\cos(x) + 2xe^y)$ y $h(x,y) = \operatorname{sen}(x) + x^2e^y - 1$, las cuales cumplen con la condición

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \cos(x) + 2xe^y = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

b. Mostremos que existe una función $T(x,y)$ tal que $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$ y $\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$. Para hallar tal función T, se pone por ejemplo $T(x,y) = y\,\mathrm{sen}(x) + x^2e^y + r(y)$ (de tal manera que $\frac{\partial}{\partial x}(y\,\mathrm{sen}\,x + x^2e^y) = g(x,y)$). Entonces $\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = \mathrm{sen}(x) + x^2e^y + r'(y)$, así que para tener $\frac{\partial T}{\partial y} = h(x,y)$, es suficiente tener $r'(y) = -1$, lo cual se cumple por ejemplo poniendo $r(y) = -y$.

Sea entonces $T(x,y) = y\,\mathrm{sen}(x) + x^2e^y - y$ y $\phi(x) = T(x, y(x))$, donde $(I, y : I \longrightarrow \mathbb{R})$ es solución de (E). Entonces, para todo $x \in I$, se tiene $\phi'(x) = 0$, por lo que existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in I$, $\phi(x) = k$. Utilizando que $y(0) = \pi$, se obtiene $k = \phi(0) = T(0,\pi) = -\pi$. Luego, si definimos

$$S(x,y) = T(x,y) + \pi = y\,\mathrm{sen}(x) + x^2e^y - y + \pi,$$

se tendrá, para todo $x \in I$, $S(x, y(x)) = 0$.

Ejercicio 4

a. Resolviendo el problema de Cauchy lineal (E) $\left\{\begin{array}{rcl} mv' & = & -mg - \gamma v \\ v(0) & = & v_0 \end{array}\right.$ con $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\gamma = 2\,kg.s^{-1}$ y factor integrante $\mu(t) := e^{2t}$, viene $(e^{2t}v(t))' = -9,8e^{2t}$ y $v(t) = -4,9 + (v_0 + 4,9)e^{-2t}$ (con $t \in \mathbb{R}$).

b. (i) Por la expresión de $v(t)$ obtenida en el punto anterior, se tiene que el instante T en el cual $v(T) = 0$ es el T tal que $(v_0 + 4,9)e^{-2T} = 4,9$, es decir $T = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{v_0}{4,9}\right)$.

(ii) Si $v_0 = 4,9\,m.s^{-1}(\simeq 17,6\,km.h^{-1})$, se tiene $T = \frac{\ln 2}{2}$. Entonces, utilizando la condición inicial $x(0) = 0$, la altura del proyectil en el instante T es

$$x(T) = \int_0^T v(t)\,dt = -4,9T + (v_0 + 4,9)\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2T}}{2}\right) = \frac{4,9}{2}(1 - \ln 2) \simeq 0,75\,m,$$

es decir 75 centímetros.

Ejercicio 5

a. La ecuación del problema (E) es homogénea de grado 2. Para estudiarla, se introduce (por ejemplo) la función auxiliar $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (definida para $x \in I$). Si (I, y) es solución del problema de Cauchy (E), entonces $y(1) = 1$, de tal manera que existe un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$, que contiene el punto 1, tal que u es derivable en J. Además, al sustituir y por ux en la ecuación del problema (E), se tiene, en el intervalo $J \subset]0; +\infty[$,

$$x^2(3u + u^2) + x^2(1+u)(xu)' = 0,$$

lo cual es equivalente a la ecuación

$$\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{4u} + \frac{1}{4(u+2)}\right)u' = 0.$$

Y la condición inicial satisfecha por la función u es $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$, puesto que $\frac{1}{4u} + \frac{1}{4(u+2)} = \frac{u+1}{2u(u+2)}$. Esto nos da un nuevo problema de Cauchy, (E'), para la función u.

b. La ecuación del problema de Cauchy (E') es separable. Entonces, por el mismo método que en el ejercicio **2**, se demuestra que, si (J, u) es solución de (E'), entonces, para todo $x \in J$, $\ln(x) + \frac{1}{4}\ln u(x) + \frac{1}{4}\ln\big(u(x) + 2\big) = \frac{1}{4}\ln 3$.

c. Al remplazar $u(x)$ por $\frac{y(x)}{x}$ en la ecuación anterior, se obtiene que, si (I, y) es solución de (E), entonces, para todo $x \in I$, $y(x)(y(x)+2x) = \frac{3}{x^2}$, luego, utilizando que $y(1) = 1$, $y(x) = -x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}}$. Y se puede entonces verificar que la función $y : x \longmapsto -x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}}$ es solución del problema de Cauchy (E) en el intervalo $]0; +\infty[$.